

UN VISTAZO A LOS PAÍSES MEJOR EVALUADOS EN MATEMÁTICAS POR PISA. RETOMANDO: MATERIAL MANIPULABLE COMO APOYO PARA LA COMPRENSIÓN DE LOS MOVIMIENTOS ISOMÉTRICOS PARA PROFESORES DE SECUNDARIA

María Mercedes Chacara Montes* y Allán Chacara Montes**

*Doctora en Educación. Profesor-investigador en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, México.

mercedes.chacara@unison.mx

**Doctor en Proyectos. Maestro del Instituto Tecnológico de Sonora.

allan.chacara@potros.itson.edu.mx

Recibido: 28 de noviembre 2023

Aceptado: 22 de diciembre 2023

Resumen

México se ubica en el antepenúltimo lugar en el desempeño de las matemáticas, de acuerdo con los resultados de la evaluación PISA (Programme for International Student Assessment). Creemos importante revisar qué hacen los países mejor evaluados en las pruebas internacionales, entre ellos Singapur, el cual sobresale no solo por sus resultados, sino principalmente por la aplicación exitosa de una alternativa sistémi-

ca, que comprende los ámbitos de la organización, el currículum y la didáctica de la disciplina. En este país cuentan con aulas diseñadas para el trabajo colectivo de los estudiantes, equipadas con diversos materiales: algunos muy tradicionales (ábacos, reglas y escuadras, juegos de mesa, entre otros) y otros de la generación digital. Tratando de acercarnos a estas prácticas, describimos en este trabajo, una propuesta con apoyo de material manipulable para la enseñanza de los movimientos isométricos en secundaria. Se realizó un estudio de casos.

Palabras clave: Singapur, evaluaciones, manipulables, movimientos isométricos.

Abstract

Mexico is located in third-to-last place in mathematics performance, according to the results of the PISA (Programme for International Student Assessment) evaluation. We believe it is important to review what the best evaluated countries do in international tests, including Singapore, which stands out not only for its results, but mainly for the successful application of a systemic alternative, which includes the areas of organization, curriculum, and didactics of the discipline. In this country they have classrooms designed for the collective work of students, equipped with various materials: some very traditional (abacuses, rulers and squares, board games, among others) and others from the digital generation. Trying to get closer to these practices, we describe in this work a proposal supported by manipulable material for teaching isometric movements in secondary school. A case study was carried out.

Keywords: Singapore, evaluations, manipulatives, isometric movements.

Introducción

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, se está prestando mayor atención a las destrezas y habilidades de visualización

espacial, haciendo énfasis en el uso de gestos y diagramas y en las herramientas digitales que pueden permitir el aprendizaje y evaluación de este. Numerosas investigaciones avalan que el uso de nuevas tecnologías y la búsqueda de entornos de aprendizaje innovadores que conecten con los intereses actuales del alumnado conlleva el empleo de programas de geometría dinámica, dirigidos al desarrollo de habilidades espaciogeométricas como componentes necesarios en las tareas de matematización y en atender dificultades y errores (Ibili, 2019; Poonpaiboonpipat, 2021).

El trabajo con problemas o situaciones cuyos contenidos están relacionados con movimientos isométricos (rotación, reflexión y traslación) en el plano contribuye a la adquisición de la competencia visual y la formalización de construcciones geométricas. El que el estudiante pueda dar argumentos en torno a la solución de dichos problemas apoya a mejorar sus competencias discursiva y lingüística. Pese a todas estas razones y ventajas, generalmente los estudiantes muestran poco conocimiento sobre movimientos (Thaqi y Gimenez, 2016).



El pensamiento espacial. Según Sarama y Clements (2009) inicia su desarrollo desde los primeros años de la infancia y es la base de dos tipos de competencias: la orientación espacial y la visualización espacial. La orientación espacial es la competencia que involucra establecer diferentes posiciones en el espacio y operar con ellas; incluye la propia posición y sus movimientos, además, las posiciones de otras personas o de objetos, representadas en mapas y coordenadas (Sarama y Clements, 2009).

Se puede apoyar el desarrollo de estas competencias con el uso de herramientas o aplicaciones multisensoriales. Tenemos una sociedad que demanda una educación diversa, con soluciones de calidad y en igualdad de oportunidades (Del Cerro y Morales, 2021a).

Dentro de los países mejor evaluados en las evaluaciones PISA se encuentra China. Por lo que nos sería útil revisar el programa de educación chino, su organización, currículo e implementación, con el fin de analizar qué o cuáles de los anteriores elementos se pueden reforzar a los correspondientes en el sistema educativo mexicano, con el propósito de aportar información que pueda ser usada en un análisis pertinente para su mejoramiento. Liping Ma (2010) afirma que pueden existir diversos factores que influyen en esta gran diferencia, entre las cuales pueden encontrarse componentes culturales tales como la relación lenguaje-sistema numérico, organización del sistema educativo, tiempo dedicado al estudio de la materia, currículo y calidad de la enseñanza de los docentes

Rendimiento en Matemáticas PISA 2018

México se ubica en el antepenúltimo lugar en el desempeño de las matemáticas, de acuerdo con los resultados de la evaluación PISA (Programme for International Student Assessment o Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes), que en la edición de este año se enfatiza la competencia matemática, pero la evaluación incluye lectura y ciencia también. El primer lugar lo tiene Japón, seguido de Corea y Estonia.

Recordemos que la prueba PISA es impulsada por la (OCDE) Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos y se aplica cada tres años en 83 países de cinco continentes y fue suspendida en 2021 debido a la emergencia sanitaria. Su objetivo es conocer el nivel de aprendizajes adquiridos por los estudiantes de 15 años de zonas urbanas y rurales. En la edición 2018 se enfatiza la competencia matemática, pero la evaluación incluye lectura y ciencia.

En México, además, de acuerdo con la última prueba del Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (Planea), que aplica el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) en México, el 65% de alumnos de secundaria son incapaces de solucionar problemas matemáticos de quinto grado de primaria y sólo 14% de secundaria.

Características del proceso de enseñanza-aprendizaje de matemáticas en Asia

En los resultados más recientes del informe PISA, los primeros lugares son ocupados por regiones evaluadas del continente asiático, en su mayoría de China, es por esto por lo que, para hacer una propuesta de mejora en el método de educación en México, se analizan las principales características del método de enseñanza-aprendizaje en Asia.

Según (Friedman, 2013; Stevenson, 1999; L. F. and Y. Zhu, 2007; 榮金榮 R. H., 2002) el método asiático promueve que, los estudiantes construyan, aporten, expliquen y evalúen sus ideas en la resolución de problemas. Apoya a que el estudiante formule diferentes respuestas a una situación problemática y estas sean discutidas en grupo. Es importante que el profesor utilice diferentes tipos de representación para abordar un objeto matemático motivando con ello que los estudiantes den respuestas reflexivas, para lo cual el profesor da un espacio dedicado al diálogo, en cada situación o problema con el fin de asegurar la comprensión del concepto y que el estudiante genere su propio razonamiento. Además, método asiático toma en cuenta el papel de los padres de familia, quienes con su colaboración se dará seguimiento de lo aprendido.

Investigaciones similares, abordadas tanto desde el campo de la didáctica de las matemáticas como desde la propia psicología, parten de una misma premisa: la comprensión e interiorización que los alumnos desarrollan acerca de un determinado objeto matemático se ve fortalecida y consolidada cuantas más conexiones se establezcan entre los múltiples registros de representación que permiten trabajar con dicho objeto (Duval, 2016).

Las características del proceso de enseñanza-aprendizaje de Singapur que se relacionan con actividades que el Sistema Educativo de la región ejecuta para lograr dicho proceso de enseñanza aprendizaje.

- El 95% de los estudiantes en Singapur utiliza el “Método Singapur” y los libros “My Pals Are Here”. (Bransford, 2000).

- Trata de integrar la manipulación de elementos visuales en la etapa donde los estudiantes van conociendo su entorno investigando y tocando todo aquello que encuentren por su paso. según Piaget (1979), se encuentra en la fase pre-operatoria (de 2 a 7 años).



Este país cuenta con un método bien de enseñanza de matemáticas el cual se enfoca en la resolución de problemas más que en las fórmulas y teoría, esto lo consigue con una disposición gráfica de los datos y lo acompaña con el manejo de algunos objetos como apoyo a la comprensión, explicación y respuesta que se da al problema. Los estudiantes a través de sus experiencias aprenden los conceptos matemáticos por medio de elementos visuales y manipulativos (Bransford, 2000). Los libros de texto oficiales para implementar este método se llaman My Pals are Here (MPaH).

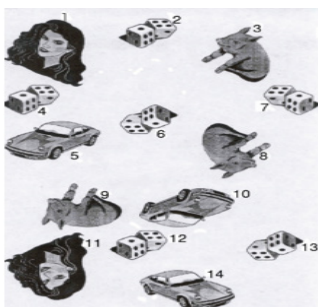
Retomando el uso de materiales concretos y manipulables. Un ejemplo de uso de manipulables en Enseñanza de los movimientos isométricos

Tratando de retomar la importancia del uso de manipulables en el aula y ejemplificar el uso, se presenta en este artículo parte de una investigación realizada con profesores de secundaria en servicio. El objetivo de la investigación fue detectar creencias y concepciones con respecto al concepto de simetría en los profesores (Chacara,

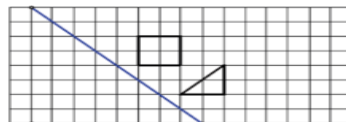
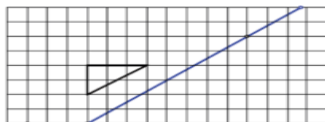
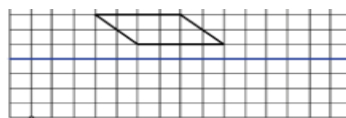
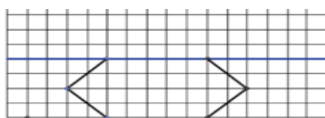
2015) y diseñar una propuesta didáctica que atendiera dichas dificultades detectadas.

Presentamos el material manipulable en el que está apoyada la propuesta, así como en la forma en que se trabajó. Dichos materiales manipulables se utilizan en la enseñanza de la geometría, específicamente geometría plana y geometría espacial:

- **Espejo:** Se hace uso del espejo en la primera actividad, para que el profesor realizará movimientos frente a él, así como movimientos de figuras geométricas, analizando su reflejo.
- **Una hoja con varias figuras:** se les entrega como parte de la actividad de la hoja de trabajo donde tratarán de aparear las figuras identificando cuando una figura es reflejo de otra.



- **Hojas con cuadrícula que contienen una figura y ejes dados,** de tal forma que dibujen el reflejo de la figura con respecto al eje dado



- **Papel.**

Dado que el doblado de papel permite hacer construcciones tan precisas como las elaboradas con regla y compás, en los últimos años se ha venido fundamentando un sistema axiomático, paralelo al de la geometría euclidiana, que permite justificar las construcciones hechas con papel. Esta nueva geometría, denominada geometría del doblado de papel, tiene sus raíces en los seis axiomas postulados por el ítalo-japonés Humiaki Huzita, en el First International Meeting of Origami Science and Technology celebrado en el año 1989 y en el séptimo axioma postulado por el japonés Koshiro Hatori (2003).

Los dobleces que se realizan en esta secuencia está justificados en estos axiomas, uno de los más importantes para nuestra actividad es, por ejemplo:

Axioma 2: dados dos puntos y, se puede hacer un doblar que lleva a sobre (Lang, 1996-2010, p. 38) Este axioma se relaciona con la construcción hecha con regla y compás del lugar geométrico de una mediatriz, es decir, una perpendicular al segmento que pasa por su punto medio. El doblar es único y los puntos deben ser distintos para garantizar la existencia del mismo.

- El **papel carbón** (también llamado en algunos países *papel pasante* o *papel calco*) es una lámina que permite hacer copias. Este método de copia (inventado a fines del siglo XIX) trae impregnado tinta, cera o carbón (de ahí el nombre *papel carbón*) por una de sus caras la que se traspasa a una nueva hoja bajo la presión que ejerce el lápiz, al colocar el papel de carbón entre la hoja original y la hoja donde se hará la copia.

En nuestra actividad se usa con el doblar de papel (espejo imaginario).

- **Software.** En esta propuesta incluimos el uso de Software de Geometría Dinámica. De entre algunos softwares que existen hacemos uso de GeoGebra, dicho software la ventaja que encontramos sobre los demás es que es gratuito, fácil de utilizar, y además en su menú utiliza la palabra reflejar (en lugar de simetría).

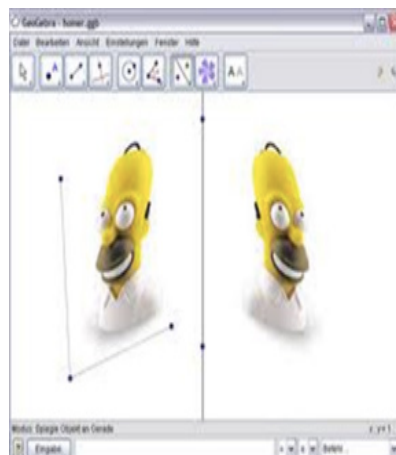
Nota: Recordemos que el error conceptual de llamar simetría a la reflexión ha quedado plasmado en el menú de algunos softwares profesionales de geometría dinámica como el “Cabri Géomètre” y el “GEUP”; error que no se presenta en otros como: “The Geometer’s SketchPad”, “Cinderella” y en el de distribución gratuita llamado “GeoGebra”. Tal como se menciona en Vargas (2014.).

GeoGebra es un programa pensado para el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas, fácil de usar, de estética cuidada, con grandes posibilidades pedagógicas y en continuo desarrollo. Reúne geometría, álgebra y cálculo.

Utilizando GeoGebra, en la enseñanza de la geometría, permite abordarla de una forma dinámica e interactiva, que ayuda a visualizar contenidos matemáticos algo más complicados de entender desde un dibujo estático.

GeoGebra permite representar de forma sencilla transformaciones geométricas básicas (reflexiones, traslaciones, rotaciones). Se accede con la herramienta “Refleja objeto en recta”, identificada con una recta y dos puntos, desplegando su menú vertical.

Para el aprendizaje de estas transformaciones es recomendable utilizar imágenes de la vida cotidiana. En GeoGebra se puede insertar una imagen en diferentes Formatos con la herramienta “Intercala imagen”. Este programa considera las imágenes como objetos geométricos, de manera que se pueden aplicar las mismas propiedades.



El uso del Vidrio refleja o semi-espejo

Este vidrio tiene la propiedad, como lo vemos en los ventanales de algunos grandes edificios, de reflejar, gran cantidad de la luz que incide sobre él (Casi como un espejo), pero que a la vez es posible ver

los objetos que se encuentran detrás de él, es algo parecido a lo que en el mundo de la óptica se le conoce como semi-espejo. Un juego de semi-espejos fue utilizado en uno de los famosos experimentos científicos realizados con el fin de medir la velocidad de la luz. Una muestra del carácter de semi-espejo que posee el vidrio reflecta, la observamos en la **Ilustración 1**, consistente en una fotografía tomada directamente a dicho dispositivo.



Ilustración 1. Uso del vidrio reflecta.

Observe que el dodecaedro amarillo se refleja en el semi-espejo, y por ser una imagen virtual, permite ver a través de ella, como puede observarse parte del letrero simetría que está detrás del espejo a través de ella, mientras que el cuerpo más oscuro es otro dodecaedro real que se encuentra detrás del espejo, a través del cual no se transparentan los objetos que están detrás de él.

Apoyo del vidrio reflecta a Congruencia espacial:

Cuando deseamos saber si dos figuras planas son congruentes, el comprobarlo resulta relativamente sencillo, ya que basta con superponer las dos figuras, si observamos que coinciden en todos sus puntos, entonces podemos afirmar que son congruentes (Cuarto axioma de Euclides); pero si nos queremos referir a un par de cuerpos (Sólidos) no planos, nos resulta prácticamente imposible compararlos directamente debido al principio físico llamado la “*incompenetrabilidad de*

los cuerpos”, que consiste en afirmar que: “Dos cuerpos no pueden ocupar el mismo espacio al mismo tiempo y al mismo respecto”, pero con el juego de imágenes reales y virtuales que con este dispositivo se puede lograr, en cierto modo, vencer este principio físico y poder así comparar la congruencia o no de dos cuerpos sólidos por superposición. Para entender cómo sucede esto, observemos la siguiente secuencia de fotografías tomadas directamente al experimentar con el mencionado prototipo.



Ilustración 2

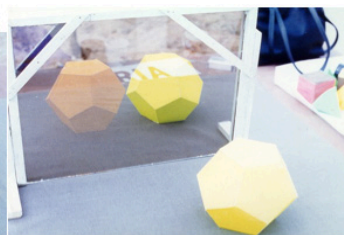


Ilustración 3

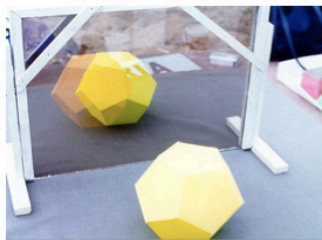


Ilustración 4

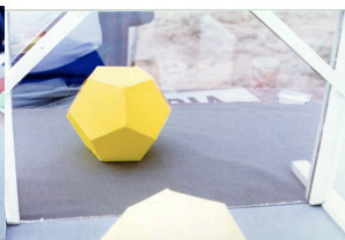


Ilustración 5

Para explicar esta secuencia, llamemos DAR al dodecaedro amarillo real, DAV al dodecaedro amarillo virtual y DCR al dodecaedro real color cobre.

En la secuencia de fotografías, **Ilustraciones 2, 3, 4, 5** se demuestra que:

- a) DCR es congruente a DAV.
- b) Pero DAV es congruente a DAR, ya que es imagen simétrica de éste.
- c) Por lo tanto, DCR es congruente a DAR, por la propiedad transitiva de la congruencia (Chacara, 2004).

Uso de transparencias con teselaciones

En el plan de estudios de secundaria, de nuestro país, entre los temas se encuentra movimientos en el plano y recubrimientos del plano (teselaciones).

Teniendo en cuenta que autores como Casas (2000) y Escher (2008) señalan que una teselación puede ser definida como el arte del recubrimiento del plano a través de figuras geométricas, por medio de diferentes técnicas de tipo artístico; se logra evidenciar la interdisciplinariedad matemática lograda a través de diferentes obras de arte, así como diversas perspectivas culturales que determinan el contexto del individuo.

Por esta razón incluimos mosaicos en acetato. Este tipo de arte permite que el estudiante reconozca las propiedades de las figuras y las transformaciones geométricas o isométricas que conllevan a desarrollar destrezas como la orientación espacial, el razonamiento lógico y la resolución de problemas, entre otros. Además, los recubrimientos en el plano es parte de los temas del eje Forma, Espacio y Medida de segundo año de secundaria.

Esta herramienta se incluye en nuestra propuesta con el fin de apoyar al profesor a relacionar los temas, isometría, simetría y teselaciones (recubrimiento del plano utilizado alguna figura y aplicándole algún movimiento isométrico).

Además, a través del estudio exploratorio se pudo concluir que un profesor que puede trabajar correctamente con las transparencias que contienen mosaicos logra observar una diferencia entre los conceptos de simetría y “reflexión”. La variable “trabajar con teselaciones” en el estudio exploratorio fue de mayor peso.

Para trabajar con esta herramienta en la secuencia se le facilita al profesor parejas de transparencias con teselaciones que pueda manipular y aplicar movimientos.

En la **Figura 1** tenemos una teselación donde al aplicarle una traslación la configuración del espacio permanece invariante (coincide el mismo patrón).

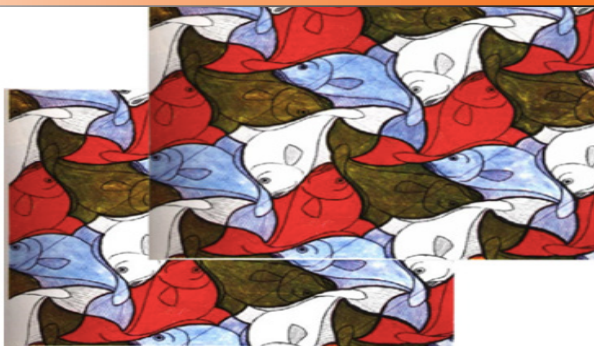


Figura 1. Traslación de Teselado.

Actualmente se está planteado su uso en la nueva escuela mexicana, en segundo de secundaria:

- **“Aprendizaje esperado:** deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.
- **Énfasis:** analizar la construcción de mosaicos (teselados) usando polígonos regulares e irregulares” (SEP, 2022).

Aspectos metodológicos

Después de un estudio exploratorio, de corte cualitativo y cuantitativo, para detectar creencias y concepciones en los profesores de secundaria con respecto a los movimientos isométricos (Chacara, 2015), se diseñó una propuesta didáctica apoyada con manipulables.

La propuesta se implementó a un grupo de 32 profesores de matemáticas de secundaria en servicio, antes de que iniciaran un diplomado de enseñanza de las matemáticas en el centro de ciencias de la ciudad de Culiacán, Sinaloa.

Para el análisis de resultados de la implementación de la propuesta nos decidimos por el estudio de casos. Se utilizó como metodología de investigación el estudio de casos, por la naturaleza misma de la secuencia didáctica y los objetivos planteados, ya que centramos nuestra atención en el cómo se desarrolla el pensamiento geométrico en el individuo y no en el comportamiento masivo de un grupo.

La selección de los casos se llevó a cabo en tres etapas, debido a que la selección es intencional y no aleatoria se necesitaba que los profesores seleccionados aportaran cierta información para nuestro estudio.

Seleccionamos 6 casos de manera intencional. Los profesores se seleccionaron tomando en cuenta:

El nivel de desempeño en las actividades correspondientes a los dos primeros niveles del modelo de Razonamiento-Calidad, por lo cual podríamos considerarlo como una etapa propedéutica para este nivel escolar, en lugar de volver a aplicar un cuestionario diagnóstico.

Nuestro interés no fue seleccionar a los profesores que quedaron mejor clasificados de acuerdo con sus respuestas sino, de acuerdo con nuestros objetivos planteados nuestro interés fue que la información del caso nos permitiera:

- Saber y documentar si el profesor independientemente del nivel de razonamiento geométrico inicial podía avanzar a otros niveles de razonamiento y/o tener una mejor calidad en sus respuestas a través de su trabajo con las actividades estratégicamente diseñadas (secuencia didáctica).
- Valorar si se da un cambio positivo en sus creencias con respecto a las Isometrías.

Por lo que se eligió a profesores con diferentes desempeños: dos profesores de bajo desempeño, dos de desempeño medio y dos de desempeño alto. Lo cual implicó hacer una estratificación inicial para elegir los casos; esperando con esto poder realizar un análisis individual y otro comparativo con respecto al desempeño de los diferentes estratos iniciales en su desempeño final.

El trabajo con estos 6 profesores se concluyó con la aplicación de la secuencia didáctica y su clasificación de acuerdo con el modelo Niveles de Razonamiento Calidad.

Desde el inicio decidimos quedarnos con a lo más tres casos, ya que para realizar un análisis de profundidad y rigor necesitábamos suficiencia de datos, antes que número de sujetos. Para tal fin selec-

cionamos un profesor de cada estrato (de desempeño inicial), y una característica importante con la que debía contar, el caso, es que impartiera matemáticas preferentemente en tercer año o segundo año de secundaria, pues son estos niveles de educación secundaria donde se aborda el tema de isometrías.

Así que en la etapa final del estudio nos dedicamos a observar de manera minuciosa el trabajo por escrito de los tres profesores seleccionados y las notas de campo, con el fin de complementar el estudio con una entrevista, pre-estructurada de acuerdo con lo observado en cada caso, a manera de diálogo (investigador-profesor). La cual aportó más datos y aclaró algunas dudas consideradas por el investigador sobre el pensamiento del profesor, detalles que no se encuentran plasmados o no se lograron detectar en las hojas de trabajo.

Implementación de la Propuesta

La presentación e implementación de la propuesta didáctica fue en forma de taller. Para cada sesión se preparó material didáctico a trabajar correspondiente a la actividad contemplada. Con el fin de lograr una dinámica que no fuera monótona, para cada reunión de trabajo se planeó alternar actividades tipo taller con manipulación de objetos y algunos prototipos didácticos expresamente diseñados (como uso del papel carbón, acetatos con teselaciones previamente diseñadas, uso del semi-espejo en el sentido en que se detalló en el apartado de descripción del material); así como actividades de trabajo formal con papel y lápiz; y otras en las que se usó Software de geometría dinámica (GeoGebra).

Como instrumento testigo de la actividad mental realizada por el profesor, se utilizaron las hojas de trabajo en las que reportaron por escrito sus actividades, en sus diversos aspectos, lo plasmado en estas hojas nos resultaron importantes para hacer el análisis del estudio requerido.

El taller permitió el diálogo entre los profesores, siendo importante para observar, el lenguaje matemático que usaban, y si lo que ellos declaraban en forma verbal lograban plasmarlo en su hoja.

Asimismo existió el diálogo entre los profesores, con intervenciones del instructor cuando fue necesario. Esto tuvo como ob-

jetivo, primeramente, conseguir que las experiencias adquiridas las expresara de forma oral o escrita en términos precisos y que de esta manera los profesores pudieran adquirir habilidad de comunicar con precisión las ideas y conceptos (dentro de las características de su nivel de Razonamiento-Calidad) en el transcurso de discusiones en el taller.

En algunas ocasiones el instructor trataba de inducir a que el profesor resumiera lo que había explorado, que integrara lo que acababan de aprender en la red de conocimientos relacionados con el tema y que pudiera tener con antelación.

Para la etapa final del estudio de casos se complementó el análisis con entrevista para aclarar algunas dudas en cuanto a lo plasmado y a lo observado en el dialogo del profesor con sus compañeros. En este momento, una vez concluido el taller, ya había cierta confianza en la comunicación con el investigador, lo que permitió que no se sintieran incomodos en la entrevista, esta se llevó a cabo como un dialogo sencillo entre profesor e investigador. Esto nos ayudó a que el profesor contestara de una manera más detallada y relajada a ciertos cuestionamientos.

Resumen de resultados de estudio cualitativo

Los tres profesores seleccionados fueron nombrados como: El caso **A** quien se ubicó inicialmente en un nivel 2 de abstracción (desempeño alto), el **caso E** en nivel 2 uni-estructural (desempeño medio) y al **caso C** se ubicó inicialmente en el nivel 1 relacional (desempeño bajo). Al termino del trabajo con los profesores hubo un cambio en su nivel de razonamiento los tres profesores lograron llegar al nivel 4 de razonamiento geométrico con diferente, aunque con diferente calidad. El **caso A** llega al nivel 4 de abstracción, el caso E nivel 4 relacional (se le dificulto el uso de lenguaje formal) y **el caso C** se ubico en el nivel 4 pre-estructural (el profesor reconoció ciertas características y propiedades del objeto matemático, pero no mostró evidencias de relacionarlas).

Reflexiones con respecto al uso de objetos manipulables en la implementación de la propuesta

- En cuanto a los objetos manipulables: Tuvieron herramientas diferentes y sencillas para abordar el concepto de reflexión (doble de papel, papel carbón, semi-espejo, acetatos, entre otros). Unos de las herramientas que les resultó muy práctico (y hasta divertido) fue el vidrio reflecta (semi-espejo) con el que lograron dibujar rápidamente el reflejo de una figura, además de poder comprobar congruencia entre objetos (como en las actividades). Es a través de las teselaciones como se logra el manejo de las isometrías no solo de una figura (prototipo) sino de un mosaico (un recubrimiento del espacio bidimensional).
- Resultó notorio el avance en su razonamiento con el uso del Software de Geometría Dinámica. El profesor llega a conjeturar y a generalizar rápidamente. En particular el uso del GeoGebra les resultó una herramienta sencilla de manipular, quienes no lo conocían con instrucciones básicas lograron trabajar y seguir experimentando, obteniendo tantos ejemplos como ellos querían. Fue a través de la geometría dinámica que pudieron trabajar composición de isometrías.
- Se logró que reconocieran y recordaran otras transformaciones diferentes a las isométricas que son un tipo de transformación (las que respetan tamaño y forma).
- A partir de diálogo pudimos constatar que los profesores lograron reflexionar sobre sus creencias acerca de la reflexión como una transformación geométrica, así como comentar que obtuvieron simetrías utilizando otros movimientos como las traslación o rotación. Comentaron también que, en efecto, en su clase, limitaban los ejemplos de simetrías a sus alumnos utilizando solo ciertos ejemplos de la reflexión.

Trabajos actuales y Futuros

Después de las reflexiones de los métodos usados en los países mejor evaluados en matemáticas, particularmente en los asiáticos y de la experiencia

con estudios realizados (con estudiantes de licenciatura en Matemáticas y con profesores de secundaria en activo) usando material manipulable, colaboramos actualmente en la adecuación de programas de estudios.

Actualmente, a nivel de licenciatura, se está llevando a cabo una revisión exhaustiva de los planes de clase de las asignaturas de matemáticas introductorias, álgebra, álgebra lineal, precálculo y métodos numéricos en el área de ciencias e ingeniería en una institución de educación superior del sur de Sonora. Este proceso se realiza con la perspectiva de enriquecer la enseñanza a través de la integración de las metodologías Singapur y Polya.

La metodología Polya, desarrollada por el matemático George Pólya, se ha establecido como la base fundamental en esa institución. Este enfoque se centra en el proceso de resolución de problemas, promoviendo la comprensión profunda de los conceptos matemáticos, la formulación de estrategias para abordar desafíos y la reflexión continua sobre el proceso de resolución.

En paralelo, se busca fortalecer esta metodología mediante la integración de elementos del método Singapur. Esta metodología, reconocida internacionalmente, se destaca por su enfoque visual y concreto. Se basa en el principio de manipular objetos tangibles antes de adentrarse en la abstracción matemática, proporcionando a los estudiantes una comprensión más sólida y aplicada de los conceptos.

La combinación de estas dos metodologías busca no solo mejorar las competencias matemáticas de los estudiantes, sino también enfocarse en la aplicación práctica de las matemáticas en el área de la ingeniería. La enseñanza de las matemáticas aplicadas adquiere un papel central, destacando su importancia en el mundo laboral y proporcionando a los estudiantes las herramientas necesarias para abordar desafíos del mundo real.

El objetivo final de esta iniciativa es reducir los índices de reprobación, fomentar un mayor interés y participación por parte de los estudiantes, y subrayar la relevancia de las matemáticas en el contexto profesional. La metodología Polya, enriquecida con elementos del método Singapur, se presenta como un enfoque integral para fortalecer la formación académica en matemáticas, preparando a los estudiantes

para enfrentar con confianza los desafíos complejos de la ingeniería y otros campos relacionados.

Referencias bibliográficas

- Bransford, J., A. Brown & Cocking, R. (2000). "How people learn,".
- Chacara, M. (2004). "Las nociones de isometría y simetría en el plano, estudiadas a través del Modelo de Van Hiele, enriquecido con principios constructivistas". Tesis para obtener el grado de maestría en ciencias con Especialidad en Matemática Educativa. Universidad de Sonora. <http://www.repositorioinstitucional.uson.mx/handle/20.500.12984/7743>
- (2015). Creencias y concepciones de los profesores de secundaria sobre la enseñanza de las isometrías. el caso de la reflexión. *EPISTEMUS* Vol. 9 Núm. 18 (pp. 29-36) ISSN: 2007-4530.
- Chow, J.. (2010) *Why Asians Are Good At Mat.* *Online+. Available: <http://www.johnchow.com/whyasians-are-good-at-math/>.
- Del Cerro Velázquez, F. & Morales Méndez, G. (2021a). Application in Augmented Reality for Learning Mathematical Functions: A Study for the! Development of Spatial Intelligence in Secondary Education Students. *Mathematics*, 9(4), 369.
- Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 61-94). Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Fan, L. y Zhu, Y. (2007). Representación de procedimientos de resolución de problemas: una mirada comparada a los libros de texto de matemáticas de China, Singapur y Estados Unidos. *Estudios educativos en Matemáticas*, 66, 61-75.
- Ibili, E. (2019). *The use of dynamic geometry software from a pedagogical perspective: status and future prospects.* Journal of Computer and Education Research, 7(14), 337-355. <https://doi.org/10.18009/jcer.579517>
- Jiménez, J. & Jiménez, S. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista*

Electrónica Sobre Tecnología, Educación y Sociedad, Volumen 4(7), pp. 2-12.

OCDE. (2018). *The PISA 2018 Results*. <https://www.oecd.org/pisa/publications/pisa-2018-results.htm>

Poonpaiboonpipat, W. (2021). Pre-service mathematics teachers' perspectives on STEM-based learning activities. *Journal of Physics: Conference Series*, 1835(1), 12081-12083.

榮金金 R. H. (2002), "Mathematics teaching in Hong Kong and Shanghai: A Classroom analysis from the perspective of variation," *Zhurnal Eksp. i Teor. Fiz.*, p. 309.

Sarama, J., y Clements, D. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. New York: Routledge.

SEP. (2022). <https://nuevaescuelamexicana.sep.gob.mx/detalle-ficha/30162/>

Stevenson, H. W. and J. W. Stigler, (1999) "¿Por qué los escolares de Asia oriental tienen alto rendimiento académico?" (p. 43).

Thaqi, X. y Gimenez, J. (2016). Geometrical Transformations in the Mathematics Textbooks in Kosovo and Catalonia. *Universal Journal of Educational Research*, 4(9), 1944–1949. doi: 10.13189/ujer.2016.040903

Thomas L., Friedman (2013). "The Shanghai Secret," TNY, 22 oct. 2013.