Concepciones y dificultades de los estudiantes de Ingeniería con respecto a la integral definida. Adecuaciones a herramientas de observación debido a pandemia por Covid-19

María Mercedes Chacara Montes* y María Teresa Dávila Araiza**

*Doctora en Educación. Docente en el Departamento de Matemáticas Universidad de Sonora. mercedes.chacara@unison.mx
**Doctora en Ciencias. Docente en el Departamento de Matemáticas Universidad de Sonora. maria.davila@unison.mx

Recibido: 16 de marzo 2022.
Aceptado: 30 de junio 2022.

Resumen

Entre los profesores universitarios que impartimos la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral II de las carreras de Ciencias e Ingenierías de la Universidad de Sonora, compartimos que en el aprendizaje del concepto de integral existen deficiencias que son detectables.

En este artículo presentamos avances del trabajo de investigación y sus adecuaciones debido a la pandemia derivada del Covid-19. El objetivo del trabajo no se limita a una simple descripción de las dificultades, limitaciones y concepciones de los estudiantes, sino que después de un análisis exhaustivo resulte una propuesta didáctica.

Dentro de los avances presentamos herramientas de observación que se tuvieron que adecuar al trabajo virtual como el cuestionario diagnóstico en Microsoft Forms y a manera de ejemplo una de las actividades didácticas con uso applet el cual se incluyó en una hoja de trabajo de GeoGebra.

Palabras clave: Dificultades, integral definida, cuestionario diagnóstico, actividad didáctica.

Abstract

Among the university professors who teach the subject of Differential and Integral Calculus II of the Science and Engineering careers at the University of Sonora, we share that in learning the concept of integral there are deficiencies that are detectable.

In this article, we present advances in the research work and its adjustments due to the pandemic derived from Covid-19. The objective of the work is not limited to a simple description of the difficulties, limitations and conceptions of the students, but rather that after an exhaustive analysis a didactic proposal results.

Among the advances presented observation tools that had to be adapted to virtual work such as the diagnostic questionnaire in Microsoft Forms and, as an example, one of the didactic activities with applet use, which was included in a GeoGebra worksheet.

Keywords: Difficulties, definite integral, diagnostic questionnaire, didactic activity.

Antecedentes del Problema

En México, las carreras enfocadas al área de matemáticas (orientadas a las ingenierías), dedican al estudio del cálculo diferencial e Integral I y cálculo integral diferencial e Integral II e los primeros dos semestres de las carreras, como sucede en las carreras de Ingeniería de la universidad de Sonora, donde el alto índice de reprobación muestra las dificultades de los estudiantes en estas materias; a partir de lo cual diversas investigaciones de tipo cognitivo en Didáctica de las Matemáticas se centren en el estudio de los problemas de aprendizaje del Cálculo.

La preocupación por los altos índices de reprobación ha llevado al departamento de Matemáticas, de la Universidad de Sonora, a diseñar exámenes departamentales con la finalidad de identificar los temas en los que los estudiantes muestran mayor dificultad y tratar de homogeneizar los cursos de Cálculo en las Ingenierías.

La integral definida es uno de los temas fundamentales de la materia Cálculo Diferencial e Integral II en Ciencias e Ingeniería. Sistemáticamente se presentan dificultades en el aprendizaje del concepto de integral, por lo general se identifica con el cálculo de primitivas y con la aplicación indiscriminada de la regla de Barrow, tal como se ha observado en (Llorens, 2002) y (Mundy, 1984); existe un uso excesivo de la algebrización, es decir, los estudiantes prefieren el registro algebraico al visual pese a sus dificultades (LLorens, 1997) (Mundy, 1984), (Eisenberg,1994), (Gordon, 2007) y (De Villiers, 2006).

Problema de Investigación

Con base en las percepciones de ciertas dificultades en clase y en los diferentes estudios donde en todos ellos hay consideraciones comunes que sirven de base en nuestra investigación, como son la complejidad del concepto de Integral Definida, las dificultades y errores persistentes que muestran los alumnos en la comprensión y/o construcción del concepto, las demandas lógicas que debe establecer un alumno entre los elementos matemáticos y la coordinación de varios sistemas de representación para llegar a un desarrollo del esquema conceptual de Integral Definida; todo esto nos lleva a formular las siguientes preguntas:

¿Cuáles son algunas de las concepciones y dificultades que presentan los estudiantes de ingeniería en el tema de Integral Definida?

Otras Preguntas de Investigación relacionadas

¿Cuáles son los cambios que se generan en las concepciones y dificultades del estudiante después de la intervención de una secuencia didáctica basada en el Modelo de Van Hiele complementado con la teoría de Representación Semiótica de R. Duval?
¿De qué manera influye en los estudiantes la concepción de la integral

definida interpretada como el área bajo la curva en el momento de resolver problemas en contexto?

Para responder nuestra pregunta de investigación y las preguntas que se desprenden es necesario diseñar un instrumento de exploración y el diseño de una secuencia didáctica, los cuales estarán basados en el Modelo de Van Hiele y Teoría de Representación Semiótica de R. Duval.

Elementos teóricos

Los elementos teóricos que sustentan el desarrollo de nuestra investigación se configuran en torno al Modelo de Van Hiele y Representaciones Semióticas (Duval, 1998).

El Modelo de Pensamiento Geométrico de Van Hiele nos guía por 5 niveles consecutivos con sus respectivas fases de aprendizaje, propiciando que el desarrollo del pensamiento de los alumnos vaya desde niveles elementales a los abstractos. Para la realización de las fases nos apoyaremos en la Teoría Representación Semiótica de Raymond Duval, la cual nos ayudará a representar la información del estudiante mediante los registros de representación a utilizar como son: numérico, tabular, gráfico, algebraico y verbal.

A pesar de que el modelo de Van-Hiele surge de manera específica para promover el desarrollo del pensamiento geométrico se ha extendido a otras áreas de las matemáticas, para abordar conceptos de álgebra, Análisis Matemático, abordar la noción de Espacio–Tiempo, entre otros, como en (Campillo, 1998), (Campillo, 2002), (Ceballos, 2003) y (Llorens,1997).

Uso de la Tecnología Digital

Diversas investigaciones nos indican que utilizar la tecnología digital para realizar las tareas de la enseñanza tradicional de una manera mecanizada no modifica la visión de la enseñanza y aprendizaje, en este caso, del Cálculo Integral; debemos pensar en implementar a la tecnología como un medio que nos ayude a coordinar de manera coherente los diferentes registros de representación del concepto Integral, ver (Rojano,2006), es decir, los recursos tecnológicos digitales no son didácticos por sí mismos, sino que el profesor y/o investigador encargado debe tener una estrategia planeada, para propiciar aprendizaje y promover competencias en el estudiante. La tecnología según su uso puede ayudar a desarrollar habilidades o puede estorbar, como se comenta sobre el cuidado del uso de software en el aula en (De Villiers, 2006). Existen diversos softwares que se han utilizado como, por ejemplo, Maple, Derive, MathCad, Graphmatica, EUCLIDES, Geogebra, Cabrí, Cinderella, Mathematical Visualization Toolkit, entre otros, en particular; Geogebra, el cual además de ser un software libre, tiene diversos recursos que se pueden ir integrando gradualmente para la enseñanza del cálculo integral, así mismo apoya a que el alumno transite de una representación de la integral a otra.

El uso de Software en la enseñanza del Cálculo Integral no sólo promueve el conocimiento en el estudiante o consolida el que ya tiene, su potencial radica en aclarar conflictos conceptuales. A manera de ejemplificar el uso de la tecnología digital en Cálculo Integral, se presentan dos casos:

- Permite comparar el valor de la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran por debajo de la curva con la medida del área bajo la curva (integral definida) y la suma de las áreas de los rectángulos que están por arriba de la curva.
- Aclara el error conceptual o concepción de que la integral definida se define siempre como siendo una función primitiva de. El software, ayuda a clarificar que una función puede ser integrable en un intervalo cerrado y no poseer primitiva.

Aportaciones Teóricas

En la descripción inicial del Modelo se señala la existencia de un quinto nivel, cuya característica básica es la capacidad para manejar, analizar y comparar diferentes sistemas axiomáticos Geometrías.

Una de las aportaciones teóricas es definir nuestro quito nivel de razonamiento, que ordinariamente en los niveles escolares no se utiliza, en este nivel se pretende que el estudiante tenga claro que una función puede ser Riemann integrable en un intervalo cerrado y no poseer primitiva (Burrill, 1969).

Otra aportación sería la adecuación del Modelo de Van Hiele (en sus fases de aprendizaje) con la teoría de Representaciones Semióticas específicamente para abordar el concepto de Integral Definida.

Metodología

Nuestra metodología en general se basa en un estudio exploratorio que se enmarca en el paradigma cualitativo, pero se complementa con métodos cuantitativos. Recordemos que la metodología más adecuada para una investigación depende del problema que se plantee y de los objetivos, presentamos las fases propuestas planeadas para la investigación.

Resulta relevante para fines de esta investigación hacer el estudio debidamente estructurado en el que se observan y evalúan cualitativa y cuantitativamente variables que proporcionan información útil acerca del manejo del concepto de Integral Definida por parte de los estudiantes.

Avances de investigación

Se realizaron adecuaciones a un primer cuestionario. Los cambios en el instrumento se basaron fallas observadas en un problema, tomando en cuenta: redacción y complejidad.

Además, se adecuó el trabajo de manera virtual por lo que el cuestionario se diseñó en Microsoft Forms para aplicar vía Microsoft TEAMS **Figura 1,** el cual se aplicó a otra muestra de nueve estudiantes de Ingeniería, permitiendo que el investigador anote sus observaciones.

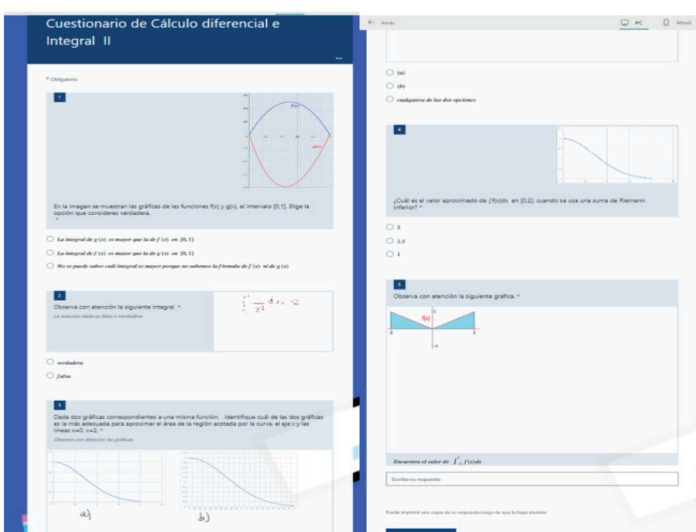

Figura 1. Cuestionario Diagnóstico.

Resultados del Diagnóstico

Microsoft Forms permite cambiar las preguntas de manera aleatoria, por lo cual presentamos los resultados que arroja el sistema de manera descriptiva **Figura 2**.

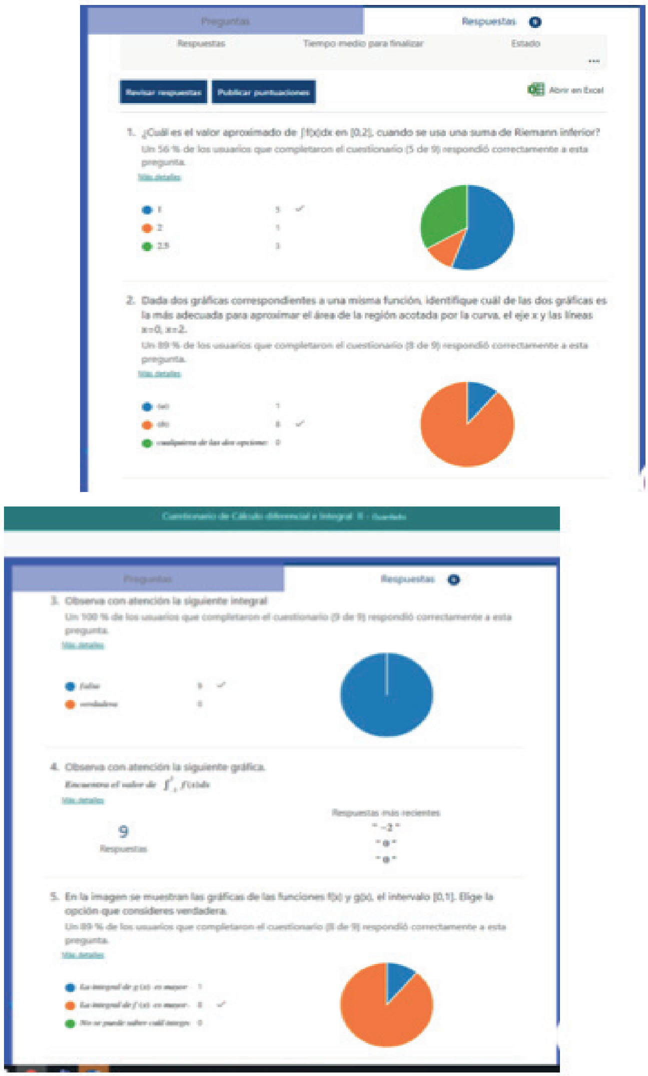

Figura 2. Descripción de las respuestas-Microsoft Forms.

Debido al trabajo virtual sentimos que la observación estuvo un tanto limitada y en consecuencia tuvimos algunas dudas sobre los resultados. En particular con el ítem 2 (en **Figura 1**), en el cual los nueve estudiantes eligieron la misma respuesta. Para explorar y tener información clara sobre el porqué de la respuesta se diseñó la siguiente actividad.

Actividad: Área bajo la curva de una función discontinua y no acotada

Se incluyó la actividad referente a la integral de la función en el intervalo [-1,1], donde debían elegir si era falso o verdadero que . Se esperaba que algunos estudiantes aplicaran un algoritmo para resolver la integral y obtuvieran ese resultado, pasando por alto que la función es discontinua en x=0 y no es acotada en el intervalo de integración. Los nueve estudiantes contestaron que era falso.

Con el objetivo de explorar si los estudiantes pueden transitar entre la noción de área y de integral, y de explorar los argumentos que pueden dar para justificar que es falso el resultado mencionado, se diseñó un applet de GeoGebra (ver la figura siguiente), en el cual se mostraba la gráfica de la función y se proporcionaban dos puntos sobre el eje x que permitían controlar el intervalo [a, b]. También, se mostraba una región sombreada bajo la curva en ese intervalo y el valor de su área.

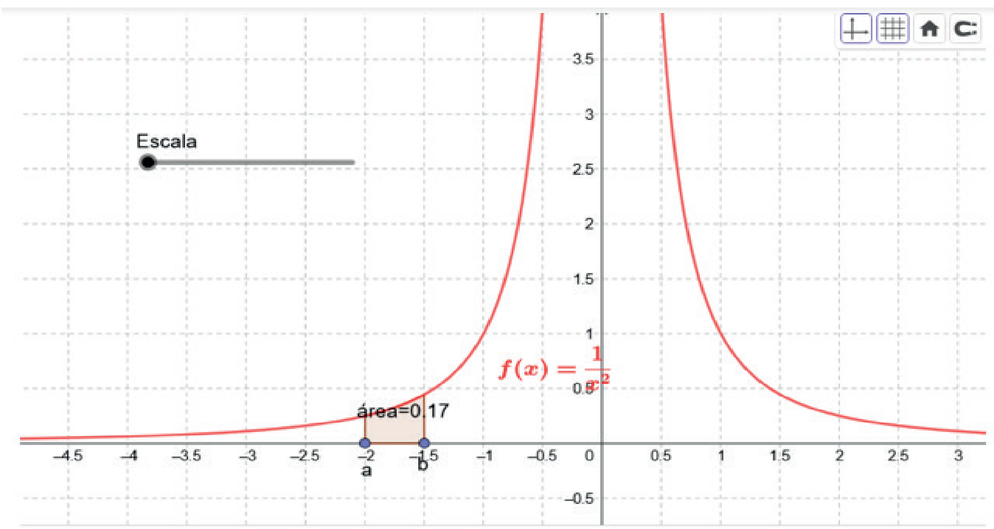

Figura 3. Captura de pantalla del trabajo de un estudiante en GeoGebra.

El applet se incluyó en una hoja de trabajo de GeoGebra (disponible en https://www.geogebra.org/m/yrkfwnbt), en la cual se incluyeron preguntas guía para explorar el comportamiento del área de la región señalada cuando el valor b se aproximaba a cero, con el propósito de que el estudiante pudiera rescatar elementos para poder responder la pregunta: *¿Cuál es la integral de la función f en el intervalo [-1,1]?* y proporcionar argumentos al respecto.

Es importante destacar que los 6 estudiantes pudieron emplear la noción de área para obtener una conclusión sobre la integral de la función en el intervalo [-1,1]. Algunos de ellos, en sus argumentos, hacen referencia al proceso de cambio del área conforme b se aproxima a cero, otros destacan que la función no es continua o no está definida en x=0, mientras que otros resaltan que la función es "infinita" en x=0.

De los 9 estudiantes:

- Uno no contestó la hoja de trabajo.
- Dos no contestaron la pregunta sobre el valor de la integral en [-1,1].
- Dos contestaron que la integral era divergente, argumentando que la función es infinita (en cero).
- Un estudiante mencionó que la integral tiende al infinito, ya que la función es indeterminada en x=0 porque se estaría dividiendo entre cero.
- Un estudiante respondió que la función no tiene una integral y que el área es infinita.
- Un estudiante argumentó que el resultado es infinito positivo o indeterminado porque la función crece hasta el infinito en [0,0].

Conclusiones

Con éste tipo de actividades, dónde el alumno puede visualizar la función y hacer manipulaciones con el uso del applet, existieron diferentes respuestas y no contestaron de manera mecánica haciendo uso de la Regla de Barrow, como suele suceder en clases.

En este entorno los estudiantes perciben las matemáticas como una ciencia experimental y pueden desarrollar sus competencias. Por otra parte, el aprendizaje del cálculo, así como no se puede reducir al manejo del registro algebraico o analítico, tampoco se puede quedar en el nivel visual, por lo cual para la visualización es imprescindible desarrollar habilidades para la conversión entre registros de representación, articulando los objetos visuales entre sí y con los objetos no visuales inherentes a los procesos matemáticos.

Por todo lo anterior se sigue trabajando en el diseño y adecuaciones de actividades didácticas.

Trabajo futuro

Se tiene proyectado aplicar de nuevo las herramientas tanto el cuestionario diagnóstico y actividades didácticas en GeoGebra a diferentes grupos de ingeniería (que por lo general son grupos de cuarenta alumnos) y con base en los resultados obtenidos se podrán establecer conclusiones generales.

El análisis de resultados se hará a través de métodos cuantitativos y cualitativos. La pertinencia de trabajar ambos métodos radica en que para la comprensión de los objetos de estudio se atenderá diversos factores asociados: De índole teórico (matemáticos) y perfil de ingreso (Si en el bachillerato, el estudiante, cursó la materia de Cálculo Integral).

Basados en el análisis, se evaluará la pertinencia del diseño e implementación de una secuencia didáctica que atienda las dificultades observadas. Esperando con ello cambios positivos en los resultados de evaluaciones institucionales (exámenes Departamentales) en la materia Cálculo Diferencial e Integral II.

Referencias bibliográficas

Burrill y Knudsen. (1969). Real variables. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Campillo, P. y Pérez Carreras, P. (1998) La noción de continuidad **desde** la óptica de los niveles de Van Hiele. *Divulgaciones Matemáticas*, v. 6, **núm**. 1, pp. 69-80.

– (2002). Construcción de un concepto imagen adecuado al concepto de continuidad de Cauchy. *Divulgaciones Matemáticas*, v. 10, núm. 1, pp. 51-62.

Ceballos, L. y López, A. (2003), Relaciones y funciones: conceptos clave para el aprendizaje del cálculo, y una propuesta para la aplicación del modelo de Van Hiele. *Revista Educación y Pedagogía*, Vol. XV, núm. 35, pp. 131-140.

De Villiers, M. (2006). "Some pitfalls of dynamic geometry software". *Learning and Teaching Mathematics,* 4: 46-52.

Duval, R. (1998). "Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento", en F. Hitt (ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II,* México, Grupo Editorial Iberoamericano, pp. 173-201.

Eisenberg, T. (1994). *On understanding the reluctance to visualize*. Z.D.M., 94/4, pp. 109-113.

Gordon, S. P. & Gordon, F. S. (2007). Discovering the fundamental theorem of calculus. *Mathematics Teacher 100* (9), 597-604.

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1994). *18th PME.* Paper presented at the A model of test design to assess the van Hiele, Lisboa.

Llorens, J. L. y Santonja, F. J. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas*, v. 5, núm. 1/2, pp. 61-76.

Llorens, J. L. (2002). Tecnología para el realismo en la enseñanza del Cálculo Integral. *La Gaceta de la RSME*, Vol. 5.2, pp. 455-462.

Llorens, J. L. y Pérez Carreras, P. (1997). An Extensión of van Hiele's Model to the Study of Local Approximation, *Int. J. Math. Educ. Sci. Techonol*. 28, n. 5, pp. 713-726

Mundy, J., *Analysis of Errors of First Year Calculus Students*, en *Theory, Research and Practice in Mathematics Education*, Bell, A., Low, B. and Kilpatrick, J. (Eds.), Proceedings ICME-5, 1984, 170–172.

Rojano, M. T. (2006). *Los principios básicos de los modelos EFIT y EMAT. En: Rojano Ceballos, M. T. (ed.). (2006).* Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula. México: Secretaría de Educación Pública, 15-23.