El modelo Niveles de Razonamiento-Calidad para detectar dificultades conceptuales en la enseñanza de la geometría. Un estudio con profesores de secundaria

Cruz Evelia Sosa Carrillo* y María Mercedes Chacara Montes**

*Doctora en Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Sinaloa. Coordinadora estatal de la Academia de Matemáticas del bachillerato universitario. evelia.sosa@uas.edu.mx cruzevsosa@gmail.com
**Doctora en Educación. Profesor investigador en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora. mercedes.chacara@unison.mx meche@mat.uson.mx

Recibido: 4 de noviembre 2020
Aceptado: 20 de marzo 2021

Resumen

En la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en los niveles de educación media básica se presentan diversos obstáculos cognitivos cuando se trata de objetos geométricos que el alumno observa de manera estática, como triángulos, círculos entre otros. Esta dificultad puede incrementarse al estudiar objetos geométricos cuya definición implica movimiento como es el caso de las isometrías. En este trabajo se propone un modelo que permite medir el razonamiento geométrico y la calidad con la que éste se ha desarrollado a través del establecimiento de niveles de razonamiento y niveles de calidad del mismo. El instrumento fue probado con profesores de secundaria mediante el trabajo con problemas que involucran isometrías. Se presenta el diseño y justificación del Modelo resultado de la fusión entre dos referentes teóricos importantes: el modelo de Niveles de razonamiento de Van Hiele y la Taxonomía SOLO que se definen en el cuerpo del trabajo.

Palabras clave: Modelo, geometría, razonamiento, calidad, isometrías.

Abstract

Teaching and learning of geometry in middle school education levels presents various cognitive obstacles when it comes to geometric objects that the student observes in a static way, such as triangles, circles, among others. This difficulty can be increased when it comes to studying geometric objects whose definition implies movement, as is the case of isometries. In this work, a model is proposed that allows to measure geometric reasoning and the quality with which it has been developed through the establishment of levels of reasoning and quality levels. The instrument was tested with middle school teachers by working with problems involving isometries. The design and justification of the Model resulting from the fusion between two important theoretical references: The Van Hiele levels of Reasoning model and the SOLO Taxonomy, which are defined in the body of the work.

Keywords: Model, geometry, reasoning, quality, isometries.

Planteamiento del problema

En este trabajo se presenta la importancia del desarrollo de un razonamiento geométrico en los profesores de secundaria que les permita generar en los alumnos los aprendizajes esperados del eje forma espacio y medida (correspondiente a Geometría en el nivel secundaria). En nuestras experiencias como observadores e instructores en diplomados estatales, hemos constatado que hay dificultades en el profesor y alumno respecto al razonamiento en geometría, ver diversas investigaciones como (Desmond,1997; Pawlik, 2004; Chacara y Sosa, 2015).

El nivel de razonamiento en geometría tanto de profesores como de estudiantes, ha sido objeto de estudio de la matemática educativa desde hace tiempo, una de las teorías más relevantes al respecto es el modelo de van-Hiele, que se retoma en Gutiérrez & Jaime (1994); donde a través de este modelo caracterizan el nivel de razonamiento de los profesores en formación, concluyendo en su investigación que en geometría, la mayoría de los futuros profesores poseen una adquisición correspondiente al Nivel 1 del modelo de Van Hiele, que corresponde a las habilidades de (reconocimiento) y en menor número al Nivel 2 (de análisis).

Los cinco niveles de Van Hiele son (Van Hiele 1999; Usiskin 1982, Gutiérrez & Jaime 1994):

1. Reconocimiento.
2. Análisis.
3. Clasificación.
4. Deducción.
5 Rigor.

En el nivel de educación media en México, la problemática de bajos niveles en el razonamiento en matemáticas se ha medido en estudiantes mediante algunas pruebas oficiales, entre ellas la prueba PLANEA, que refleja en los resultados a nivel nacional 2017, que la mayor parte de los alumnos (64.5%) se posicionaron en el nivel I de logro en matemáticas, PLANEA evalúa el dominio de los aprendizajes a partir de cuatro niveles, siendo el I (uno) el insuficiente y el IV (cuatro) que se considera como sobresaliente.

En estas evaluaciones podemos apreciar la dificultad en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, pero comprender esta problemática implica revisar diversos aspectos, en este trabajo revisaremos uno de ellos, el concerniente al profesor. En el caso de los profesores de matemáticas, el problema de la enseñanza también es amplio, complejo y presenta diversos factores importantes, entre ellos está el conocimiento previo. Es decir, nos referimos al conocimiento que posee un profesor de matemáticas de secundaria cuando se prepara en cursos, diplomados, especialidades entre otras actividades que le permiten formarse tanto de manera disciplinar como en pedagogía para impartir sus clases. Las concepciones y creencias que los profesores tienen acerca de los conceptos matemáticos que deben impartir en sus cursos marcan la dirección de sus clases.

Concepciones y creencias

Las concepciones y creencias pueden considerarse el conocimiento previo de un individuo, el cual puede ser formal o informal, implícito o explícito y puede ser parcialmente correcto o equivocado, en comparación con los estándares científicos (Dochy, Segers, & Buehl, 1999).

El conocimiento previo puede ser resistente al cambio y puede obstaculizar el aprendizaje de nuevas ideas como lo indican algunas investigaciones (Aguirre, 1988; Dochy *et al*., 1999; fischbein, 1989; fischbein,2005; simons, 1999). Puede consistir en un conjunto de valores personales información, conocimientos, experiencias, creencias y memorias de un individuo.

De acuerdo con Hidalgo, Maroto y Palacios (2015), “las creencias matemáticas se considera que forman parte del conocimiento perteneciente al dominio cognitivo y están compuestas por elementos afectivos, evaluativos y sociales, con una fuerte estabilidad. Dicho conocimiento se refiere a las matemáticas y a su enseñanza y aprendizaje, y está basado en la experiencia. Las creencias pueden mantenerse con distintos grados de convicción y no son consensuales. A diferencia del conocimiento, la creencia tiene la connotación de la disputabilidad (cada uno puede tener una creencia); mientras que el conocimiento debe satisfacer una condición de verdad, la creencia es independiente de su validez" (Hidalgo, Maroto y Palacios, 2015 pp. 67-68).

Para fines de este trabajo de acuerdo con Ponte (1994), Moreno (2000), Azcárate, García y Moreno (2006) entenderemos por creencia a las ideas poco elaboradas, generales o específicas, las cuales forman parte del conocimiento que posee el docente, pero carecen de rigor para mantenerlas e influyen de manera directa en su desempeño. Se le asigna suficiente validez, verdad o credibilidad como para guiar el pensamiento y la conducta.

Moreno (2000) consideró que las creencias son conocimientos subjetivos, generados a nivel particular por cada individuo para explicarse y justificar muchas de sus decisiones y actuaciones vividas. Según este autor, las creencias no se fundamentan sobre la racionalidad, sino más bien sobre los sentimientos, las experiencias y la ausencia de conocimientos específicos del tema con el que se relacionan, lo que las hacen ser muy consistentes y duraderas para cada individuo.

Cada profesor da una estructura a sus conocimientos para posteriormente transmitirlo a sus estudiantes, a esta estructura se definen como concepciones. Es esencial explorar el pensamiento del profesor (sus concepciones y creencias) por ser los encargados de las prácticas de enseñanza- aprendizaje. Es fundamental que un profesor de matemáticas tenga conocimiento amplio de los conceptos que aborda en su clase. Azcárate, García y Moreno (2006) señalan que las concepciones de los docentes consisten en la estructura que cada profesor de matemáticas da a sus conocimientos para posteriormente enseñarlos o transmitirlos a sus estudiantes.

Objetivo general de la investigación

Con base en esta problemática, consideramos pertinente realizar un estudio exploratorio para detectar dificultades, concepciones y creencias del profesor en el tema de Transformaciones Geométricas. Abordamos el concepto de isometrías (como una de las transformaciones) con énfasis en la reflexión. Se elige este concepto porque tanto estudiantes como profesores están familiarizados con la reflexión desde su educación temprana, también por la confusión que se ha detectado del profesor de identificar como el mismo concepto "reflexión" y "simetría", hecho que hemos observado, en base a nuestra experiencia con profesores de secundaria (en Diplomados), en nuestro trabajo de investigación con alumnos de licenciatura en matemáticas (Chacara, 2004), en otros trabajos se ha comentado la confusión con profesores de primaria, se ha analizado algunos libros de texto y software de Geometría Dinámica que, por la forma en que se mencionan los conceptos, pudieran abonar a la confusión (Thaqi, 2009.; Thaqi, Giménez & Rosich, 2011; Vargas, 2014.).

Para detectar dificultades y creencias del profesor alrededor del concepto de isometría se diseña un modelo al que llamamos Modelo Razonamiento-Calidad basado en dos referentes teóricos importantes, el Modelo de Van Hiele y la Taxonomía SOLO (ambos de origen piagetiano) fusionando ambas teorías se construye el modelo “Niveles de Razonamiento-Calidad”. Basado en trabajos de (Van Hiele 1999; Usiskin 1982; Biggs & Collis, 1982; Gutiérrez, Jaime & Fortuny, 1991; Pegg, Gutierrez & Huerta, 1998).

La taxonomía SOLO (Structure of Observed Learning Outcome) elaborada por Biggs y Collis en 1982, se basa en la importancia de analizar y reflexionar sobre los resultados observables del aprendizaje que los sitúa en niveles de complejidad cognitiva. Los niveles cognitivos de la taxonomía SOLO son:

1. Preestructural (sin comprender o de manera vaga).
2. Uniestructural (identifica).
3. Multiestructural (describe, utiliza algoritmos).
4. Relacional (aplica, relaciona, analiza).
5. Abstracción (reflexiona, teoriza, generaliza).

El modelo que presentamos en este trabajo que llamamos modelo Razonamiento-Calidad, permite ubicar en qué nivel de razonamiento geométrico inicial en que se encuentra el profesor y la calidad con la que se desempeña en dicho nivel. El desarrollo y adecuación del modelo Razonamiento-Calidad al tema de isometrías es una de las aportaciones de nuestro trabajo.

Objetivos específicos

Los objetivos específicos son realizar un estudio exploratorio con profesores del nivel secundaria para:

- Detectar dificultades y creencias del profesor en el tema de Transformaciones Geométricas.
- Revisar las concepciones que los profesores tienen acerca de las isometrías y comparar esas concepciones con las definiciones correctas.
- Obtener información acerca de la dificultad que implica para el profesor que las isometrías involucran movimiento.

• Con base en las observaciones de los puntos anteriores y el modelo que proponemos de Razonamiento-Calidad ubicar a los profesores en el nivel correspondiente de acuerdo a su desempeño.

Es pertinente mencionar que la importancia de detectar creencias en los profesores es muy relevante porque las creencias acerca de los objetos matemáticos a enseñar pueden no ser acordes con las definiciones correctas y como son parte del conocimiento previo pueden ser un obstáculo cognitivo importante para la enseñanza de conceptos y procesos correctos, y pueden además hacer que el profesor sea resistente a cambiar sus concepciones y a adquirir nuevos conocimientos ya sean disciplinares o pedagógicos.

El estudio exploratorio se realizó con profesores de secundaria en activo. La finalidad es la clasificación de los profesores en base al modelo Razonamiento-Calidad. A través de la aplicación de un cuestionario cuyos objetivos son:

a) Analizar y caracterizar las concepciones y creencias que tiene un grupo de profesores de matemáticas sobre la enseñanza de las isometrías.
b) Clasificar a los profesores en algún nivel del modelo Razonamiento-Calidad.
c) Realizar una evaluación entre diversas variables que representan características del profesor tanto de formación académica como de manejo de contenidos.

Población y muestra

La muestra para nuestro estudio se conformó de 26 profesores de matemáticas de secundaria en activo.

La importancia de trabajar con profesores de secundaria, estriba en que en ese nivel aparecen por primera vez de manera formal el estudio de las transformaciones geométricas (en el nivel primaria se trabajan de manera intuitiva) por lo tanto la primera aproximación teórica que tienen de las transformaciones geométricas es en el nivel secundaria. Si en dicho nivel se detectan problemas importantes en estos temas, éstos pueden llevarse a otras instancias, por lo que es pertinente atenderlos. Esto aunado al hecho de que, en este nivel de secundaria, se pretende que el estudiante se apropie de competencias matemáticas tales como:

• Comunicar información matemática.
• Validar procedimientos y resultados.
• Resolver problemas de manera autónoma.

El manejo inadecuado de objetos matemáticos en su parte conceptual o en su enseñanza, será un obstáculo que se opone al logro de estas competencias.

A diferencia de los niveles de preescolar y primaria el grupo de docentes de educación secundaria es heterogéneo referente a la formación profesional. Debido a que de acuerdo con la convocatoria nacional para el otorgamiento de plazas docentes de la SEP, publicada a través de la página oficial de la secretaría[1]:

Puede ocupar una plaza como profesor de secundaria aquellas personas que cumplan con alguno de los dos requisitos:

> 1. Egresados de las instituciones formadoras de docentes con alguna especialidad.
> 2. Egresados de otras instituciones de educación superior con títulos de ingeniería o de licenciatura.

La Secretaría de Educación Pública privilegia la entrada a ocupar el cargo de profesor de secundaria a egresados de las Instituciones Formadores de docentes, tales como la Universidad Pedagógica Nacional y la escuela Normal.

Por tanto, de acuerdo a los lineamientos oficiales, tenemos docentes de secundaria con distinta formación profesional. Por lo cual nos parece necesaria la siguiente reflexión:

> Estos diferentes perfiles profesionales parecen dificultar la comunicación entre los docentes de las escuelas secundarias y generar diversas percepciones de la enseñanza y de los objetos matemáticos a enseñar. En este sentido, es relevante mostrar algunas investigaciones de educadores matemáticos que sustentan esta afirmación, al respecto Vinner (2018), indica que como resultado de una exploración y análisis con profesores y alumnos de bachillerato indica que los símbolos asociados a la comprensión implicados en el proceso de comunicación, son los que tienen algún significado en común para cada una de las personas que participan de dicho proceso.

Diseño metodológico (adecuación del modelo de niveles de razonamiento para el concepto de Isometría).

El modelo Niveles de Razonamiento-Calidad es una fusión de dos referentes teóricos importantes, el Modelo de Van Hiele y la Taxonomía SOLO. Esta fusión se realizó dado que por un lado buscábamos ubicar en un nivel cognitivo al profesor e identificar sus dificultades al abordar el tema de isometrías, por otro lado, saber la calidad de sus respuestas.

Existe un gran recorrido en cuanto a trabajos de investigación basados en el modelo de Van Hiele para la enseñanza de la geometría, así como trabajos en diferentes áreas de la enseñanza de las matemáticas basados en la taxonomía SOLO sobre todo para medir la calidad de respuesta en los estudiantes. Se detectan similitudes entre la Taxonomía SOLO y el modelo de Van Hiele de aprendizaje. Ambos modelos ofrecen a los profesores una forma de evaluar el razonamiento de los estudiantes. Además, el objetivo de ambos modelos es guiar a los maestros para la evaluación, así como la instrucción.

Se ha tratado de hacer una correspondencia uno a uno entre los niveles de las dos teorías (Jurdak, 1991). Jurdak sentía que estaba en condiciones razonables para hacer coincidir los dos conjuntos con la excepción de dos niveles. Estas excepciones fueron el Nivel pre-estructural de Taxonomía SOLO (indica que no hay respuesta o una respuesta irrelevante) y el nivel del modelo Van Hiele de rigor (la comparación de los sistemas axiomáticos).

La existencia de este nivel más alto de Van Hiele también ha sido cuestionado o señalado difícil de evaluar en la investigación del modelo de Van Hiele (Wilson, 1990). El nivel 5 de Rigor por lo general no se trabaja en los niveles elementales, en un trabajo previo Chacara (2004) diseñamos actividades para este nivel con estudiantes de la Licenciatura en matemáticas inscritos en la materia Geometría Moderna, es decir, estudiantes que por la naturaleza de su especialidad es necesario revisar si logran llegar al nivel de rigor. Por otro lado, una de las claras diferencias entre ambos modelos, reside en el hecho de que la Taxonomía SOLO no es específica de la geometría; sin embargo, la teoría de Van Hiele surge, precisamente, de la propia preocupación ante resultados adversos de los esposos Van Hiele como profesores al tratar de enseñar geometría.

Algunos investigadores han ampliado su marco teórico de sus trabajos incluyendo teorías diferentes pero compatibles. Otras investigaciones tienen como objetivo estudiar relaciones y correspondencias entre el modelo de Van Hiele y la Taxonomía SOLO, (Huerta, 1999; Pegg *et al*., 1998).

Huerta (1999) considera que “no es posible asociar un único nivel de respuesta SOLO que sea característico de los estudiantes que razonan en un nivel dado de van Hiele. Es decir, no creemos en asociaciones generales del tipo, nivel 1 de van Hiele con nivel SOLO uni-estructural, o nivel 2 de van Hiele con nivel SOLO multi-estructural, para un modo de razonar concreto-simbólico. Estas asociaciones no han resultado ser tan directas como en un principio se pensaba (Jurdak, 1991). Las evidencias de los resultados muestran, por el contrario, que existe más de un nivel SOLO para un nivel de

Van Hiele dado. Así, para estudiantes con un grado de adquisición alto del primer nivel de Van Hiele, se han distinguido niveles SOLO que recorren los niveles Uni-estructural y Multi-estructural o los niveles Uni-estructural, Multi-estructural y relacional, al respecto "los resultados nos indican que dentro de los diferentes niveles de razonamiento ocurren muchas más cosas de las que se describen por la teoría de niveles, aquéllas que se explicarían desde la taxonomía SOLO" (Huerta 1999, p. 303).

Pertinencia y justificación de adecuar el modelo en el aprendizaje de las isometrías.

La adecuación del modelo se realizó tomando en cuenta el hecho de que las dificultades de la matemática no pertenecen solamente a situaciones de enseñanza, sino también a la naturaleza propia de los objetos matemáticos (que, por ser abstracciones, ya involucran todo un reto cognitivo para su comprensión y uso adecuado), en nuestro caso el concepto de Isometrías, que además de ser un objeto abstracto implica movimiento.

Entonces, tomando como base los modelos teóricos el modelo de Van Hiele y la Taxonomía SOLO, puntualmente, en los descriptores de los niveles de razonamiento por Gutierrez & Jaime (1994) y las conclusiones Huerta (1999) decidimos retomar esta fusión de ambas teorías, de acuerdo con el modelo, un profesor podría estar en algunos de estos niveles. 1. Reconocimiento, 2. Análisis, 3. Clasificación, 4. Deducción.

Donde la calidad con la que se encuentra en cada nivel está dada a través de otros subniveles: Pre-estructural, Uni-estructural, Multi-estructural, Relacional, Abstracción.

A la fusión de ambas teorías le denominamos Niveles de Razonamiento–Calidad. Su diseño se adecuó para el trabajo con profesores (que imparten matemáticas en nivel secundaria) exclusivamente para abordar el tema de isometrías haciendo especial énfasis en la "reflexión".

A continuación, se presenta el resultado de la fusión de las dos teorías adaptado al estudio de las isometrías basado en los trabajos de Gutierrez & Jaime (1994), Huerta (1999), Chacara y Sosa (2015).

Descripción del Modelo Niveles de Razonamiento-Calidad

En el modelo, se describen de manera clara los objetivos geométricos que el profesor debe alcanzar con cierto nivel y cierta calidad. Dichos objetivos implican diferentes tipos de situaciones cognitivas y de procedimiento. El modelo se muestra en la tabla 1.

Tabla1. Modelo de Razonamiento-Calidad.

Nivel 1 de Razonamiento	**Descripción**
Reconocimiento	Se consideran los objetos de forma general, no se consideran elementos ni propiedades incluso pueden incluirse atributos erróneos que no corresponden al objeto en estudio. No se generalizan característica entre figuras de la misma clase
Calidad de Respuesta en el Nivel 1	
Pre-estructural -Se reconocen elementos nominales. Por ejemplo: espejo, reflejo, trasladar, rotar, también pueden considerarse conceptos erróneos (creencias) como que el espejo debe ser vertical, en cualquier caso. -Considera al espejo como un objeto imaginario que refleja figuras. -Intenta dibujar el reflejo de una figura. **Uni-estructural** Comprende la necesidad de movimiento para generar una isometría con respecto a un eje. **Multi-estructural** Reconoce que hay un movimiento y un eje relacionado con ese movimiento. **Relacional** -Elije un punto de la figura y encuentra su reflejo (con material concreto). Relaciona el movimiento con el eje. -Dado un conjunto de figuras trata de identificar las que pueden tomarse una como imagen reflejada de la otra con respecto a un eje (espejo imaginario). Trata de justificar sus respuestas. -**Abstracción** Logra los niveles anteriores, además reconoce las características invariantes entre el objeto original y el resultado de la isometría.	
Nivel 2 de Razonamiento	**Descripción**
Análisis	El profesor comprende y emplea la definición correcta del objeto matemático identificando correctamente las características que lo definen y lo distinguen de otros objetos. Puede generalizar propiedades de manera informal, y establecer relaciones informales entre esas características. Puede darse el caso de que el profesor trabaje con creencias agregando características que no pertenecen al objeto u omitiendo algunas que son esenciales.

Calidad de respuesta en el Nivel 2
Pre-estructural -Comprende que debe atender una definición del objeto geométrico. No trata de apropiarse del objeto sólo a través del sentido común. -Intenta experimentar con diferentes puntos de la figura. -Intenta dibujar el reflejo de otra figura con ejes distintos al vertical. **Uni-estructural** Identifica las características invariantes en las figuras reflejadas, comprende de manera informal que el eje de reflexión (espejo imaginario o doblez de papel) se encuentra en medio de la figura original y su reflejo. **Multi-estructural** -Une un punto de la figura original con su reflejo y realiza mediciones pertinentes de los puntos original y reflejo con el eje. Realiza esta acción con diferentes puntos. -Reconoce los atributos invariantes que se conservan (forma, lados, ángulos entre otros). -Establece la igualdad de distancias entre un punto de la figura original y su homólogo en la figura reflejada respecto al eje. **Relacional** Puede comprender que las figuras reflejadas conservan tamaño y forma. También que el segmento de recta que une el punto original con su homólogo es perpendicular al eje de reflexión (espejo). **Abstracción** -Generaliza que la Reflexión es una transformación Isométrica (o movimiento isométrico por lo que siempre la figura conserva su tamaño y forma), indica la importancia de la existencia del eje de reflexión, de la equidistancia de un punto de la figura original (p) al eje y de este al punto reflejado(p´), y la perpendicularidad (del segmento pp' con respecto al eje de reflexión) -Logra establecer una definición con sus propias palabras, no necesariamente correcta, pero con una estructura formal. Tal vez enuncie un conjunto mínimo de condiciones para decir que una figura sea reflejo de otra.

Nivel 3 de razonamiento	Descripción
Clasificación	El profesor describe y clasifica objetos geométricos de acuerdo a sus definiciones comprendiendo la importancia de conocer las definiciones formales de los objetos y relaciona propiedades de manera informal. Argumenta informalmente conjeturas.

Calidad de respuesta en el nivel
Pre-estructural -Dada una figura y su reflejo, encuentra el eje de reflexión. -Establece que el eje es único, de manera informal. **Uniestructural** -Intenta justificar de manera puntual: que dado un punto P y su reflejo P' existe solo un eje de reflexión (el cual es mediatriz del segmento de recta PP'). -Puede realizar una reflexión seguida de otra (con ejes paralelos y no paralelos). Sin identificar que se trata de composición de reflexiones. -Observa que una composición de reflexiones no es otra reflexión: ○ Una composición de reflexiones cuyos ejes son paralelos es otra transformación llamada traslación. ○ Una composición cuyos ejes no son paralelos es otra transformación llamada rotación cuyo centro es el punto de corte entre los ejes y cuyo ángulo es el doble del ángulo formado por los ejes. Aunque a la composición de reflexiones no la nombre como tal sino como una reflexión seguida de otra. **Multiestructural** Realiza correctamente reflexiones seguidas de otras con ejes paralelos y no paralelos. Establece relaciones informales entre las reflexiones que pueden tener errores (creencias) **Relacional** -Observa que una reflexión es un movimiento isométrico (una transformación), al igual que la rotación y la traslación. Las cuales conservan tamaño y forma en las figuras. -Relaciona la reflexión con las otras isometrías (rotación y traslación). **Abstracción** -Puede establecer la definición de reflexión de forma correcta. -Establece una generalización importante, estableciendo que la reflexión tiene la propiedad de generar las demás isometrías.

Nivel 4 de Razonamiento	**Descripción**
Prueba	El profesor logra realizar razonamientos formales para la argumentación de sus conjeturas. Comprende definiciones lógicamente equivalentes.

Calidad de respuesta en el nivel 4
Preestructural Realiza intentos pertinentes (movimientos) con teselaciones las cuales se les presentaron a través de material concreto (acetatos). Trata de encontrar la transformación que deja invariante esos espacios bidimensionales (teselaciones o mosaicos). **Uniestructural** **-**Describe detalladamente las transformaciones que dejan invariantes las configuraciones definidas por las respectivas teselaciones. -Intenta determinar la reflexión de las figuras más complejas que ya no corresponden a objetos prototipo. Puede evaluar o no correctamente el espacio resultante. **Multiestructural** Intenta la reflexión de un mosaico o teselación, experimentando diferentes ejes (vertical y horizontal). Observando que al reflejar con cierto eje la configuración de la teselación no permanece invariante. **Relacional** En cualquier situación, tal como reflejar una figura o comparar reflexiones dadas, identifica que ciertas reflexiones dejan el espacio bidimensional invariante. **Abstracción:** **-**El profesor inicia la comprensión de la relación reflexión–simetría de manera formal. Comprenden a los conceptos de reflexión y simetría como objetos diferentes, aunque estén relacionados. Pudiendo enunciar que no toda reflexión genera una simetría, y que una simetría puede generarse o no por otras transformaciones. -Intenta una definición de simetría.

Instrumento (cuestionario)

Nombre____
Formación profesional ___________________ Antigüedad __________________

1. ¿Consideras importante hablar de movimientos en geometría?, justifique su respuesta.
2. ¿Qué tipo de transformaciones abordas en la clase de geometría?
3. ¿cómo manejas en clase el concepto de homotecia?, menciona algunos materiales de apoyo para este concepto.
4. ¿Cómo les presentas el concepto de isometría a tus alumnos? ¿Qué movimientos isométricos les mencionas?
5. ¿Cómo relacionas el concepto de isometría con el de simetría?

Indique su respuesta.

6. En tus clases se realizan actividades usando algún material manipulativo como el geoplano, el tangram, espejos, etcétera.
a) Nunca ____¿por qué?
b) Habitualmente ______ ¿por qué?
c) Eventualmente ______ ¿por qué?
7. ¿Usa algún software de geometría dinámica para la enseñanza de las transformaciones geométricas?
a) Nunca ____¿por qué?
b) Habitualmente ______ ¿por qué?
c) Eventualmente ______ ¿por qué?
8. La exclamación ¡HOLA! (figura1), Está rodeada de cuatro espejos colocados sobre las líneas de puntos. Escribe, en cada uno de los cuatro cuadrados sombreados, cómo se vería el reflejo de la exclamación en estos espejos.

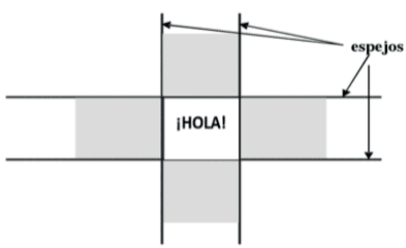

Figura 1: figura del reactivo 8.

a) ¿Qué tipo de transformación sufrió la palabra ¡Hola!?
b) ¿Qué propiedades de la palabra permanecen invariantes?
c) Elige un solo punto de la palabra y llámale p y a su punto reflejado llámale p' elige un solo espejo. Mide la distancia del punto p a la línea del espejo y del espejo a p'. ¿cómo son esas distancias?
d) Traza un segmento entre el punto p y p'. ¿Cómo es ese segmento con respecto a la línea de su espejo?
e) ¿Puedes dar una definición formal de la transformación geométrica que has experimentado en los incisos anteriores?
9. El triángulo *A" B" C"* se obtuvo al hacer dos reflexiones del triángulo *ABC* respecto a las rectas perpendiculares *M* y *N* respectivamente, como se muestra a continuación.

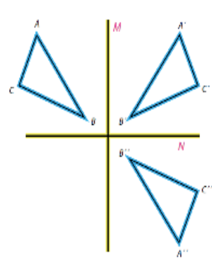
Figura 2: figura del reactivo 9.

¿Qué transformación tuvo el triángulo ABC al hacer estas dos reflexiones?
a) Se obtuvo una traslación del triángulo
b) Se obtuvo una rotación de 180º del triángulo.
c) Se obtuvo un triángulo *A"B"C"* simétrico con respecto a la recta *M*.
d) Se obtuvo una rotación del triángulo menor de 180º.
10. Dado el siguiente recubrimiento del espacio ¿Qué movimiento isométrico deja invariante las configuraciones de este espacio bidimensional?

11. Dado el siguiente espacio trata de experimentar haciendo reflexiones con eje horizontal (j) y eje vertical (k), anota tus observaciones.
12. ¿La imagen de cualquier figura reflejada es una simetría? Es decir, ¿toda reflexión hace que el espacio permanezca invariante?


Figura 3: figura del reactivo 10.

Resultados

Los siguientes casos se muestran como indicadores de la forma en que se hizo la clasificación de profesores, la clasificación global se indica en la tabla siguiente:

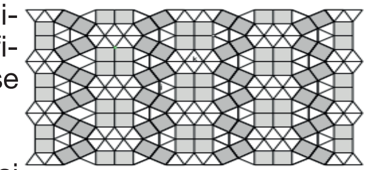
Figura 4: figura del reactivo 11.

Profesor 11**:** Experimenta de una forma casi correcta pues se le dificulta reflejar la letra “L” en los distintos ejes, detecta que este movimiento mantiene el tamaño y forma de la figura y la propiedad de equidistancia en la reflexión. Lo clasificamos en el **nivel 1 de abstracción.**

Profesor 17: Experimenta de manera casi correcta la reflexión con distintos ejes salvo por un pequeño error de la figura con uno de los ejes, entiende bien qué movimiento isométrico está trabajando. Tiene claro que características de la figura permanecen invariantes, y una de las propiedades importantes que es la equidistancia, no logra detectar la perpendicularidad. Se ubica en el **Nivel 2 Multiestructural.**

Después de ubicar al profesor por nivel obtuvimos el siguiente concentrado, tabla 2.

Tabla 2. Concentrado de la clasificación de profesores.

Profesor	Formación Profesional	Experiencia Profesional Años	Zona a la que pertenece la Población donde labora	Nivel Razonamiento-Calidad
P1	Ingeniero Civil	23	Rural	3 Multi-estructural
P2	Lic. en Matemáticas	19	Urbana	1 relacional

P3	Lic. en Educación Media con especialidad en Matemáticas	10	Urbana	3 uni-estructural
P4	Lic. en Educación con Especialidad en Matemáticas	3	Urbana	3 de abstracción
P5	Arquitecta	19	Urbana	4 pre-estructural
P6	Lic. en Informática	12	Urbana	2 pre-estructural
P7	Lic. en Educ. Media con Esp. En Matemáticas	10	Rural	1 relacional
P8	Lic. en Informática	15	Urbana	1 uni-estructural.
p9	Ingeniero Civil	11	Urbana	1 pre-estructural
P10	Ing. Maquinista Naval, Lic. Esp. Inglés	18	Rural	1 pre-estructural
P11	Lic. en Ingeniería	9	Urbana	1 de abstracción
P12	Lic. en Matemáticas, Maestría en Educación Básica	20	Rural	2 pre-estructural
P13	Lic. en Educación Media Esp. en Matemáticas		Urbana	2 pre-estructural
P14	Ing. Ind., Maestría en Educación con Especialidad en Matemáticas, Maestría. En Administración de instituciones educativas	18	Urbana	4 uni-estructural
P15	Ingeniería	16	Urbana	1 pre-estructural

P16	Ing. En Electrónica, M.C. en Docencia en Matemáticas	7	Urbana	2 relacional
P17	Maestría en Docencia en Campo Formativo de Matemáticas	18	Urbana	2 multi-estructural
P18	Ing. Industrial	5	Urbana	4 pre-estructural
P19	Lic. en Educación Secundaria con esp. en Matemáticas	3	Urbana	3 uni-estructural
P20	Lic. en Administración de Empresas	2	Urbana	4 pre-estructural
P21	Maestría en Ing. Civil	25	Urbana	3 uni-estructural
P22	Ingeniero Bioquímico	25	Urbana	3 de abstracción
P23	Ingeniero Bioquímico	25	Urbana	3 uni-estructural
P24	Pasante de maestría en docencia de las matemáticas	23	Urbana	4 multi-estructural
P25	Ing. Civil	25	Urbana	2 relacional
P26	Ingeniero Bioquímica	15	Urbana	3 relacional

Discusión

Indicamos algunas observaciones y reflexiones obtenidas a partir de la revisión de esta exploración.

Observaciones generales:

a) En cuanto a la muestra: Los profesores de este estudio exploratorio son docentes que ya han recibo diversas capacitaciones en enseñanza de la matemática, tanto en la parte de contenidos como en la didáctica.

Por lo que, al encontrar errores conceptuales en esta muestra, se pudo inferir que otros profesores con menos capacitación pueden tener errores similares o incluso mayores.
b) Nos ayudó a considerar mejoras tanto en el diseño del cuestionario, como en el modelo de Razonamiento-Calidad para posteriores estudios.
c) Permitió observar ciertas creencias de los profesores que ellos no consideran errores, porque las han formado a lo largo de su vida académica con base en prototipos, generalizaciones inadecuadas y apoyos visuales.

Con respecto al tercer punto, Se presentaron algunas de las situaciones que indican algunos investigadores en sus trabajos como por ejemplo Balacheff (2000), Hidalgo, Maroto y Palacios (2015) con respecto a las creencias. De acuerdo con los resultados del cuestionario y la interacción con los profesores durante la realización del trabajo, pudimos constatar que los profesores están familiarizados con la manipulación de objetos geométricos prototipo, en posición estándar Hershkowitz (1989), Nurwuahyu (2014). Es decir, acostumbran trabajar triángulos donde la base está en posición horizontal, el trabajo con figuras en otra posición les resulta complejo incluso podrían no manejarla. A continuación, indicamos ésta y otras situaciones importantes de manera más amplia.

Conclusiones

Haciendo un análisis más profundo de los resultados:

1. La mayor parte de los profesores encuestados (61.53%), por sus creencias respecto de las Matemáticas y su enseñanza, comentan que las isometrías es un tema que pocas veces es tratado en sus clases (lo que, de forma implícita, supone dar poca importancia al mismo).
2. En las actividades propuestas a los profesores, se detectaron algunas dificultades y creencias.
a) No poder encontrar el reflejo de una figura utilizando un espejo imaginativo,
b) Hablar de “espacio” le trae a la mente sólo el espacio tridimensional,
c) Solo puede reflejar figuras prototipo.
d) No tienen clara la importancia de la perpendicularidad como condición para que una figura sea reflejo de la otra.
e) El concepto de perpendicularidad no está claro, considerando la creencia de que el segmento de recta corta en el punto medio al eje.
f) El concepto simetría se concibe igual que el de reflexión, entre otros.

3. No es frecuente el uso de materiales concretos manipulables en la enseñanza de las transformaciones geométricas, en oposición al papel relevante que deberían tener, según se deduce de numerosas investigaciones. Sólo el 30.7% de la muestra dice usarlo de manera habitual.
4. Los softwares de Geometría Dinámica, muy difundidos y ampliamente contrastados, como Geogebra y CABRI, son utilizados nunca o de manera eventual por el 61.53% de los miembros de la muestra. Por diversas razones: porque no los manejan, falta de tiempo, debido a la infraestructura de la escuela donde laboran.
5. Independientemente de su formación profesional se presenta la confusión del término simetría con el de reflexión. El 69.23% de la muestra presenta tal confusión. De la muestra 11 profesores cuentan con formación matemática (Lic. en Educación Matemática y/o maestría en educación matemática) y de ellos 7 presenta esta confusión (el 63.63% de los profesores con formación matemática presentan la confusión).
6. En esta nueva era de las nuevas tecnologías todavía tenemos problemas muy graves de infraestructura en algunas escuelas secundarias del estado, el 50% de las respuestas es que no se contaba con un centro de cómputo, en algunas escuelas, incluso, hubo quienes comentaron (7.7% de la muestra) que en su escuela no se contaba con luz.

Consideramos que el nivel de razonamiento y las creencias de los profesores inciden directamente en la enseñanza y por lo tanto en el aprendizaje de conceptos geométricos, por tanto, es importante tomar en cuenta esta evaluación del desempeño de los profesores, primero para mejorar la segunda exploración y después para realizar una propuesta de intervención para mejorar la enseñanza de la isometría.

Referencias

Aguirre, J. M. (1988). Student Preconceptions about Vector Kinematics. *Physics Teacher, 26*(4), 212-216. https://doi.org/10.1119/1.2342490

Azcárate, C., García, L. y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [RELIME]. 9 (1), 85-116. https://www.redalyc.org/pdf/335/33590105.pdf

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* (U. E. Docente Ed.). Bogotá, Colombia.

Biggs, J. B. & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: the SOLO taxonomy (structure of the observed learning outcome)*. New York: Academic Press.

Biggs, J. & Tang, C. (2011). *Teaching for quality learning at university: what the student does* (E. Society for Research into Higher Ed.). Maidenhead, England; New York: McGraw-Hill/Society for Research into Higher Education/Open University Press.

Chacara, M. (2004). *Las nociones de isometría y simetría en el plano, estudiadas a través del Modelo de Van Hiele, enriquecido con principios constructivistas.* Trabajo de tesis de maestría. Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora. México.

Chacara, M. y Sosa, C. (2015). Creencias y concepciones de los profesores de secundaria sobre la enseñanza de las isometrías. el caso de la reflexión. *Epistemus 3 (1), 29-36.* https://doi.org/10.21932/epistemus.3.1

Corberán R y Gutiérrez A. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Desmond, N. S. (1997). *The geometric content knowledge of prospective elementary teachers*. Doctoral thesis. Faculty of the Graduate School of University of Minessota.

Dochy, F., Segers, M. & Buehl, M. (1999). The Relation Between Assessment Practices and Outcomes of Studies: The Case of Research on Prior Knowledge. *Review of Educational Research, 69* (2), 145-186. https://doi.org/10.3102/00346543069002145

Fischbein, E. (1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. *forlearningmath For the Learning of Mathematics, 9*(2), 9-14. https://www.jstor.org/stable/40247948

– (2005). *Intuition in science and mathematics an educational approach*. Mathematics education library. Editorial Springer.

– (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*: Dordrecht. Reidel Publishing Company.

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Unión* (20), 13-31. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1994).A model of test design to assess the van Hiele. *Psichologist Mathematics Education, 18 (3), 41-48.* https://www.researchgate.net/publication/237561733_A_model_of_test_design_to_assess_the_Van_Hiele_levels

Gutiérrez, A., Jaime, A. & Fortuny, J. M. (1991). An Alternative Paradigm to Evaluate the Acquisition of the van Hiele Levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22(3), 237-251*. https://doi.org/10.2307/749076

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in Geometry-Two Sides of the Coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11 (1-2), 61-76.* https://eric.ed.gov/?id=EJ389507

Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios, A. (2015). Una aproximación al sistema de creencias matemáticas en futuros maestros. *Educación Matemática, 27 (1), 67-68.* http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262015000100065

Huerta, P. (1999). Los niveles de Van Hiele y la taxonomia solo: un analisis comparado, una integracion necesaria. *Enseñanza de las ciencias: Revista de Investigación y experiencias didácticas, 17 (02), 291-309.* file:///C:/Users/Matematicas/Downloads/21580-Texto%20del%20art%C3%ADculo-21504-1-10-20060309.pdf

Jurdak, M. (1991). Van Hiele levels and the SOLO taxonomy. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 22 (1), 57-60*. https://doi.org/10.1080/0020739910220109

Moreno, M. (2000). *El profesor universitario de matemáticas: estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.* Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. España.

Nurwuahyu, B. (9, 07, 2014). *Concept image and concept definition of a student´s concept understanding.* Proceedings of international seminar on Mathematics Education and Graph Theory. Department of mathematics Education. Islamic University of Malang, Indonesia.

Pawlik, B. (4, 7, 2004). *On false convictions concerning geometric transformations of the plane in mathematics students' reasoning*. ICME 10, Copenhagen, Denmark.

Pegg, J., Gutierrez, A. & Huerta, P. (1998). Assessing reasoning abilities in geometry. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp.275-295). Editors: C. Mammana, V. Villani. https://doi.org/10.1007/978-94-011-5226-6_9

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teacher's profesional knowledge. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings PME XVIII (vol 1, pp. 195 – 210).* Lisboa, Portugal. https://core.ac.uk/download/pdf/12424213.pdf

Puig Adam, P. (27, 04, 58). *El Material didactico matematico actual.* XI reunion de la Comisio internacional para el estudio y mejora de la ensenanza matematica y exposicion internacional simultanea. Madrid España.

Simons, P. R. J. (1999). Transfer of learning: paradoxes for learners. *International Journal of Educational Research International Journal of Educational Research, 31(7), 577-589.* http://funab.se.df.gov.br/wp-content/uploads/2018/11/Simons-1999.-Transfer-os-Learning-Paradoxes-for-Learning.pdf

Sliva, J. & Roddick, C. (26,11,2002). *Investigating Preservice Elementary Teachers' Attitudes and Beliefs Toward Mathematics*. Paper presented at the 24th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Athens, Georgia USA.

Sosa, C. (17, 07, 2008). *El efecto de los prototipos, en la enseñanza y aprendizaje de la geometría en el nivel medio superior*. PME 23 y PMENA-XXX. Morelia, Michoacán, México.

Thaqi, X. (2009.). *Aprender a enseñar transformaciones geométricas en Primaria desde una perspectiva cultural.* Tesis Doctoral. Universitat de Barcelona. Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i la Matemàtica.

Thaqi, X., Giménez, J. & Rosich, N. (9, 02, 11). *Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Paper presented at the Geometrical transformations as viewed by prospective teachers., Rzeszów, Poland.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry* (Final Report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project). Chicago, IL: University of Chicago, Department of Education. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED220288.pdf

Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics, 6*, 310-316. http://flash.lakeheadu.ca/~ed4050/Math_AQ/geovanheile.pdf

Vargas, J. (2014.). Errores conceptuales institucionalizados en Matemáticas. *EPISTEMUS, 17*, 56-62. http://funes.uniandes.edu.co/8512/1/1-2014-Errores-Conceptuales-Epistemus.pdf

Vinner, S. (2018). *Concept Formation in Mathematics: Concept Definition and Concept Image.* In: Mathematics, Education, and Other Endangered Species. Mathematics in Mind. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-90035-3_4

Wilson, M. (1990). Measuring a van Hiele Geometry Sequence: A Reanalysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(3), 230-237. https://eric.ed.gov/?id=EJ411000

Nota

[1] http://concursonacionalalianza.sep.gob.mx/CONAPD12/pdfs/convocatoria_2012-2013_DS.pdf