Preconcepciones de los estudiantes preuniversitarios sobre el concepto de "Límite de una función" en un curso de Cálculo[1]

Irvin Díaz Hidalgo

Maestro en Educación en Enseñanza de las Ciencias. Profesor de posgrado en la Universidad del Valle de México (UVM).
a01302125@tecvirtual.mx

Recibido: 23 de Junio de 2014
Aceptado: 31 de Julio de 2014

Resumen

Este trabajo analiza las preconcepciones de los estudiantes de nivel medio superior sobre el concepto de 'límite de una función' en un primer curso de Cálculo. La investigación, de corte cualitativo interpretativo, se llevó a cabo en una Escuela Preparatoria en el oriente del Estado de México, con alumnos de último semestre de bachillerato. Los principales referentes teóricos a los se hace alusión son el concepto de obstáculo epistemológico (Bachelard, 1979), las dificultades asociadas al concepto de "límite" (Cornu, 1983; Przenioslo, 2004; Sierpinska, 1987, Tall & Vinner, 1981) y las preconcepciones de los estudiantes en el aprendizaje de las ciencias (Aguilar, *et al.*, 2007; Campanario y Otero, 2000). Para la recolección y recogida de datos, así como para la presentación de resultados, se utilizó un cuestionario de ítems abiertos, estructurado a partir de cuatro categorías sobre el concepto de "límite de una función".

Palabras clave: Matemática educativa, cálculo, límite de una función, concepciones de los alumnos.

Abstract

This paper examines the preconceptions of senior high students on the concept of “limit of a function” in a first year Calculus course. The research, a qualitative interpretation type, was carried out in a High school in the eastern state of Mexico, with last semester students of high school. The main theoretical framework referred to is the concept of “epistemological obstacles” (Bachelard, 1979), the difficulties associated with the concept of “limit” (Cornu, 1983; Przenioslo, 2004; Sierpinska, 1987 Vinner & Tall, 1981) and preconceptions of students in science learning (Aguilar *et al.*, 2007; Bell and Otero, 2000). An open questionnaire item, structured from four categories on the concept of “limit of a function” was used for data collection, as well as for the presentation of results.

Keywords: Mathematics education, calculus, limit of a function, students’ preconceptions.

Históricamente, la matemática ha sido una de las materias que mayor dificultad presenta para los alumnos en una situación escolar, tanto para su compresión como para su acreditación (Mamona-Downs, 1990; Páez, 2004, Sierpinska, 1987). Sin embargo, mención especial merece el Cálculo de una variable, como el primer curso de matemática superior que se estudia en el último año de la educación preuniversitaria, pues esta rama de la matemática resulta una de las materias con mayor índice de reprobación en la mayor parte del mundo occidental.

Soportan estos comentarios las reflexiones de Artigue (1998), quien menciona que no resulta fácil para los alumnos introducirse al estudio del análisis elemental (el Cálculo), derivado, sobre todo, de los métodos de enseñanza tradicionales que reducen el análisis a un cálculo algebraico algoritmizado, o bien, a las aproximaciones teóricas o formales que se han desarrollado en el contexto de la reforma de las matemáticas modernas. Por su parte, Salinas y Alanís (2009), señalan que los problemas en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo se deben a un modelo de enseñanza tradicional que sólo ha generado altos índices de reprobación, aprendizaje sin comprensión y actitud negativa hacia el aprendizaje de las Matemáticas (Salinas y Alanís, 2009, p. 359). Finalmente, Cantoral y Farfán (1990) advierten que la premisa más importante de la que debe partirse en el estudio de la enseñanza del Cálculo, es que el discurso matemático teórico no es el enfoque más adecuado para comunicar las ideas de esta rama de las matemáticas.

Ante esta problemática, de los principales objetos matemáticos que se estudian en un primer curso de Cálculo preuniversitario, nos enfocaremos en esta investigación al concepto de "límite de una función", por constituir éste uno de los principales obstáculos al que se enfrentan los alumnos en el aprendizaje conceptual de la matemática de los cambios. En opinión de Artigue (1998: 43), "las dificultades asociadas con el concepto de límite han sido estudiadas ampliamente por los didactas de la matemática", partiendo sobre todo de la teoría de los obstáculos epistemológicos de Bachelard (1979), para quien el conocimiento científico no se desarrolla en un proceso continuo, sino resulta del rechazo de formas previas de conocimiento que se constituyen en obstáculos epistemológicos.

En este orden de ideas, respecto al concepto de límite como obstáculo epistemológico, la mayoría de los investigadores (Blázquez y Ortega, 2006; Cornu, 1983; Fernández, 2004; Przenioslo, 2004; Vrancken, *et al.*, 2006, Sierpinska, 1987) están de acuerdo en los siguientes problemas para el aprendizaje:

- El sentido común de la palabra, entendida como obstáculo o barrera.
- La sobre generalización de procesos finitos a procesos infinitos.
- La fuerza de la geometría de las formas, que impide que se puedan identificar claramente los objetos involucrados en el proceso de límite.

- La definición formal del límite, como una conceptualización de difícil comprensión.

Planteamiento del Problema

El concepto de límite es uno de los más complejos en la comprensión de los principales problemas y métodos del Cálculo diferencial e integral (Courant y Robbins, 2006). Como lo menciona Pita (1998), éste es el concepto sobre el cual descansan los dos pilares más importantes del Cálculo: la derivada y la integral. La noción de "límite" de una función es, además, un concepto sobre el que los estudiantes tienen una gran cantidad de preconcepciones que, en mayor o menor medida, impiden su aprendizaje.

Przenioslo (2004) señala que, a nivel superior, algunos alumnos piensan en el límite de una función en términos de entornos y aproximaciones infinitesimales (aproximaciones gráficas de "algo"). Otros estudiantes se enfocan al comportamiento de los valores de la función, y tienden a simplificar el concepto de límite como una sustitución algebraica de la función en un punto específico de su dominio (Vrancken, *et al.*, 2006). Existen, inclusive, alumnos que consideran el concepto de límite como una asíntota de una función, la cual limita la continuidad de la variable dependiente en un punto dado (Fernández, 2004; Sierpinska, 1987).

Por lo anterior, si se desea modificar el paradigma educativo que prevalece actualmente, sobre todo en el nivel medio superior (en donde poco se ha investigado al respecto) y lograr una verdadera comprensión por parte de los estudiantes de los fundamentos del Cálculo, resulta imperioso el identificar con precisión cuáles son los modelos de pensamiento alternativos más recurrentes que muestran los alumnos respecto al "límite de una función" en el nivel preuniversitario.

En este orden de ideas, el problema de investigación, como relación de los constructos anteriormente descritos, quedó planteado de la siguiente manera: ¿Cuáles son las preconcepciones dominantes de los estudiantes de nivel medio superior sobre el concepto de "límite de una función", en un primer curso de Cálculo de una variable?

Marco teórico

En realidad, el concepto de "límite de una función" ha evolucionado mucho desde su concepción inicial, con el método de exhaución de los griegos y los trabajos de Eudoxo, hasta su definición formal y actual, que se debe intuitivamente a Cauchy y, fundamentalmente a Weierstrass, en el siglo XIX.

Siguiendo los trabajos de Cornu (1983) y Robinet, es posible dividir la conceptualización del "límite de una función" en tres periodos históricos muy bien definidos, por el tratamiento matemático que se da en ellos del objeto de estudio.

El primer periodo abarca desde el siglo III a. C., con los intentos de Eudoxo y Arquímedes para resolver problemas de cuadraturas y tangentes, y hasta los trabajos de Fermat, a inicios del siglo XVII, para el trazado de rectas tangentes. Particularmente, destaca en la geometría griega clásica el llamado "método de exhaución", utilizado magistralmente por Eudoxo y Euclides.

El segundo periodo inicia en la segunda mitad del siglo XVII, con el nacimiento del Cálculo infinitesimal, y culmina con los trabajos de la Escuela Politécnica en Francia, a lo largo del siglo XVIII (Boyer, 1999). En esta etapa, el paradigma o el momento epistemológico dominante lo representan Newton y Leibniz, quienes se esforzaron por trabajar con los procesos infinitos y por separar los procesos del Cálculo, de aquellos de la Geometría y del Álgebra (Cantoral y Farfán, 2003).

Finalmente, la tercera etapa se da en lo que Blázquez y Ortega (2006: 193) llaman la “aritmetización del análisis”. Este periodo se caracterizó por un intento de los matemáticos de lograr un rigor científico más fundamentado en conceptos aritméticos y la incipiente Teoría de números. Principalmente en Francia, el desarrollo de la matemática tuvo un auge sin precedentes, tanto en la Escuela Normal, como en la Escuela Politécnica. De esta última, Cauchy (1821: 21), en su *Cours d’ analyse*, proporcionó la siguiente definición de límite: “Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás”.

Ahora bien, respecto a las “Preconcepciones” de los estudiantes, ya Bachelard en la construcción de su teoría de los obstáculos epistemológicos, mencionaba que:

> Frecuentemente me ha chocado el hecho de que los profesores de ciencias, más aún que los otros si cabe, no comprendan que no se comprenda [...]. No han reflexionado sobre el hecho de que el adolescente llega al curso de Física con conocimientos empíricos ya constituidos; no se trata, pues, de *adquirir* una cultura experimental, sino de *cambiar* una cultura experimental, de derribar los obstáculos amontonados por la vida cotidiana (Bachelard, 1979: 20 y 21).

Sin embargo, no fue sino hasta finales de la década de los 70 y principios de los 80, cuando la tesis doctoral de Viennot (1979, citado en Carrascosa, 2005) permite definir una línea de investigación en las preconcepciones de los estudiantes relativas a la dinámica, en el campo de la Física. Los resultados obtenidos por el autor promovieron que otros estudiosos de la didáctica de las ciencias, pronto comenzaran a realizar investigación sobre los esquemas de pensamiento alterno de los estudiantes, en las distintas ramas de la ciencia.

Aguilar, *et al.* (2007), menciona que las preconcepciones, o las imágenes conceptuales de los estudiantes han sido motivo de estudio por parte de los teóricos en Psicología Cognitiva en los últimos treinta años, y las definen como "un conjunto de conocimientos construidos por los estudiantes, diferentes de los científicos, que persisten en el tiempo, representan su modo particular de interpretar el entorno y les permiten actuar en distintas circunstancias". Como bien lo concluyen Campanario y Otero (2000), es bastante claro que el profesor de ciencias debe suponer que sus alumnos ya poseen un conocimiento científico alternativo (aunque generalmente incorrecto).

Citando a diversos autores Aguilar, *et al.* (2007: 692 y 693) y Mora y Herrera (2009: 74), describen que los modelos alternativos de pensamiento por parte de los estudiantes poseen ciertas características comunes tales como:

- Se trata de construcciones individuales, pero que son compartidas por otros miembros del grupo escolar.
- Son de carácter intrínseco, por lo que, en la mayoría de los casos, las personas no son conscientes de sus ideas y explicaciones.
- Se presentan en situaciones contextuales diferentes, por lo que pueden ser contradictorias cuando se aplican a diferentes contextos.
- Son formas de pensamiento que frecuentemente se refieren a un determinado concepto científico, en donde la interpretación es generalmente errónea y diferente a aquella aceptada por la comunidad científica.
- Se originan a partir de las experiencias de las personas con relación a fenómenos cotidianos, a la interacción social, y a la enseñanza recibida en la escuela.
- Guardan cierta semejanza con ideas que se han presentado en la historia de la ciencia.

- Son persistentes, es decir, no se modifican fácilmente por medio de la enseñanza tradicional de la ciencia, incluso cuando la instrucción es reiterada, por lo que se considera, interfieren con la instrucción científica.

Ahora bien, ¿cuál es el origen de las ideas previas? La mayoría de los autores (Aguilar, *et al.*, 2007; Campanario y Otero, 2000; Mora y Herrera, 2009) coinciden en que las preconcepciones de los estudiantes se forman, inicialmente, de la interacción de los individuos con su entorno físico social, y además, de la interpretación que los alumnos hacen del diseño instruccional en el entorno escolar. En este sentido, las preconcepciones sobre el mundo real no son algo accidentado, o trivial, sino por el contrario, se trata de un sistema cognitivo que tiene sentido para el sujeto, por las relaciones e interacciones entre su entorno físico y social (Mora y Herrera, 2009).

Y ¿cómo afectan estas preconcepciones de los estudiantes en su aprendizaje y qué se puede hacer para tratar de modificar estos modelos de pensamiento? Como señalan Campanario y Otero (2000: 157), las ideas previas son más que un almacén para consultas posteriores, "son una especie de filtro conceptual que permite a los alumnos entender, de alguna manera, el mundo que los rodea". En el diseño instruccional, cuando las concepciones alternas se presentan en el formato de errores, éstas permiten entender porqué los alumnos tienen ideas aparentemente absurdas, y actuar en consecuencia. Campanario y Otero (2000: 157) proponen un ejemplo claro de esta situación cuando los alumnos preguntan "¿cómo influye la masa de un objeto en el tiempo en que tarda en caer desde cierta altura?". De la misma forma, estas preconcepciones determinan en gran medida qué aspectos de la realidad científica deben ser estudiados con mayor profundidad. Por citar otro ejemplo, el significado preciso de algunos términos (como el de "calor" en Termodinámica o de "límite" en Cálculo) generalmente no es compartido por profesor y alumnos.

Metodología

Atendiendo al planteamiento del problema, resulta evidente que lo que se pretende en esta investigación es conocer (más que probar) ¿cuáles son las preconcepciones de los estudiantes de nivel medio superior, respecto al concepto de "límite"? Por ello, al constituir el presente un estudio de tipo exploratorio, se decidió optar, fundamentalmente, por una metodología cualitativa de investigación.

A partir de este enfoque metodológico se diseñó un instrumento de recopilación y recogida de datos, a manera de cuestionario de preguntas abiertas (Anexo A), que proporcionara información mucho más detallada sobre las formas de pensamiento de los estudiantes y sus preconcepciones alternativas (McDermott y Shaffer, 1992).

Este análisis parte de una técnica de evaluación de preguntas abiertas propuesta por McDermott y Shaffer (1992), en donde, en una primera fase, se estableció la codificación de los principales patrones de respuesta de los alumnos y posteriormente se analizaron patrones de respuesta y de razonamiento, asignando un código a los tipos de respuestas y razonamientos, que en cada pregunta resultaron más frecuentes. Así, a través de un diseño sistemático, una vez aplicados los cuestionarios, se revisaron exhaustivamente las respuestas para identificar las ideas más comunes de los alumnos participantes, en cada una de las preguntas, y posteriormente, estas ideas comunes se categorizaron y codificaron siguiendo la metodología de trabajo propuesta por Salloum y BouJaoude (2007), en donde se identifican las principales categorías de pensamiento de los alumnos respecto al concepto de límite, y se codifican con el objeto de "relacionar nuestros datos con respecto a nuestras ideas respecto de esos datos" (Salloum y BouJaoude, 2007: 42).

A continuación, en una segunda fase, se llevó a cabo el análisis individual de las diferentes respuestas y sus modelos de razonamiento. Esto se realizó tabulando en Excel (mediante el uso de tablas pivote dinámicas) las respuestas y los razonamientos de los estudiantes, para determinar aquellos que resultaron los modelos de razonamiento más recurrentes en los alumnos, y que se consideran preconcepciones dominantes sobre el concepto de "límite de una función".

El trabajo de campo se llevó a cabo en una Escuela Preparatoria Oficial, institución pública dependiente del Departamento de Bachillerato General, del Gobierno del Estado de México, ubicada en el municipio de Valle de Chalco, al oriente de la entidad.

Particularmente, durante el ciclo escolar 2012-2013, los alumnos de tercer año representaron el 24.82% de la población estudiantil de la Preparatoria. De estos alumnos, el 74% eran mujeres y sólo el 26% restante eran hombres. Su promedio de edad fue de 17 años. El nivel de aprovechamiento en este tercer año osciló en un 65% de acreditación, con un promedio académico de 7.1, siendo el campo disciplinar de matemáticas el que mayor índice de alumnos reprobados presentó.

El instrumento se aplicó a 40 alumnos (que ya habían estudiado el tema de límites en la materia de Cálculo diferencial), a quienes se les explicó el objetivo del cuestionario y se les entregó un impreso del mismo. Los exámenes se llevaron a cabo en un espacio áulico adecuado, con una duración de una hora y cuarenta minutos.

Análisis y discusión de resultados

A partir de la aplicación del instrumento, se decidió presentar las respuestas y razonamientos de los estudiantes, de acuerdo a las siguientes categorías:

- La imagen del "límite de una función" como los valores a los que se acerca una función en una vecindad, de un punto dado;
- El límite como "aproximación gráfica"; el límite como la "aproximación a un valor";
- El límite de una función como elemento del dominio de ésta; el límite como el valor de la función en un punto definido de su dominio y,
- El límite de una función como un cálculo algorítmico.

Respecto a la primera categoría de investigación, sobre el límite de una función, como la aproximación infinitesimal de ésta en la localía de su dominio, es decir, el conjunto de valores a los que se acerca la función en una vecindad o entorno (*ítem* uno), se observó que, a diferencia de los resultados reportados por Vrancken, *et al.,* (2006) o por Fernandez (2004), la mayoría de los alumnos (un 89%) entienden los elementos de la definición informal del límite, y por lo tanto, no acusan dificultades asociadas con el concepto de función, por lo menos desde el enfoque algebraico de la expresión funcional.

En palabras de Vrancken, *et al.* (2004), estos estudiantes no muestran dificultades asociadas con conceptos como dominio, variable independiente o independiente.

Sin embargo, se pudo observar que la mayoría de los alumnos sí tienen problemas en evaluar el concepto de límite a través de representaciones gráficas. Por ejemplo, la mayoría de los estudiantes (41%) no explicó el teorema de los límites laterales a partir de una gráfica que corresponde a una función par, que ellos conocen y en donde el límite cuando *x* tiende a cero es gráficamente evidente (véase el ítem dos del Anexo A). Sólo el 32% de los estudiantes lograron explicar el teorema, evaluando la gráfica de la función cuando la variable independiente tiende a cero.

Respecto a la segunda categoría, sobre el límite como una aproximación gráfica o en un valor, los resultados mostraron que muy pocos estudiantes (16%) lograron describir los elementos de la definición formal del límite de una función, a partir de una gráfica en donde se hace explícita la relación de una aproximación infinitesimal dentro de un intervalo abierto (ítem tres). Estos resultados son muy parecidos (aún menores) a los que obtiene Fernandez en su estudio sobre el límite a partir de la definición **ε – δ.**

En este sentido, la definición formal del límite no se enfoca, como bien lo establece Fernandez, en encontrar límites, sino en “demostrar su existencia y entender lo que realmente son” (2004: 43). Por ello, es comprensible que muy pocos estudiantes logren identificar los elementos mínimos de la definición formal del límite. Sin embargo, estamos de acuerdo con Fernandez en que este tipo de enfoques permite a los estudiantes lograr mayor confianza para el estudio de matemáticas superiores, como los contenidos posteriores de un curso de Cálculo diferencial e integral, y confirma la idea de Becerra (2004) en el sentido de que es posible introducir a los alumnos al concepto de límite de una función, desde un enfoque aún intuitivo, pero más formal, que la simple aproximación infinitesimal.

Asimismo, respecto al ítem cuatro, sobre la comprensión del concepto de límite a través de una aproximación gráfica hacia un valor, (0, en el caso del lim⍰→⍰⍰⍰⍰’), resulta muy satisfactorio que un 62% de los estudiantes haya explicado que el límite de la función trigonométrica, cuando *x* se acercaba a *π/2*, era cero.

En la mayoría de los casos, los estudiantes razonaron sobre el comportamiento geométrico de la función, para llegar a una conclusión razonada. Como lo confirma Przenioslo (2004, p. 117), "los elementos clave de las imágenes de un límite, de la mayoría de los estudiantes, se relacionan con la idea de puntos gráficos que se acercan a algo". En este sentido, la visualización gráfica del comportamiento de la función, más que otras formas de representación de ésta, permitió a los alumnos comprender un valor límite en la proximidad de una función trigonométrica continua.

Con relación a la tercera categoría de investigación, referente al límite de una función como elemento de su dominio, es decir, como el valor de la función en un punto dado $a \mid a \in D$, se pudo observar que los alumnos relacionan el límite de una función trigonométrica, con una asíntota de la misma que indetermina la función, por lo que el límite de $f(x)=\tan x$ cuando x tiende a $\pi/2$ no existe.

Este tipo de estudiantes proporcionaron respuestas muy completas, no sólo sobre el límite, sino además, sobre el comportamiento discontinuo de la función en un periodo de π, lo cual implica modelos cognitivos superiores.

Posteriormente, en el ítem número ocho, en donde existe una discontinuidad en una función por intervalos, los resultados mostraron que los estudiantes consideran que el límite por la izquierda no existe, ya que los límites laterales no son iguales. Ello implica una sobre generalización de dicho teorema. Respecto a este reactivo, se confirman los resultados obtenidos por Vrancken, *et al.* (2004) quienes obtuvieron tendencias muy positivas con el límite por la derecha (en donde no hay problema, pues hay una continuidad definida para la parte de la función que es lineal). Asimismo, fue muy interesante observar como algunos alumnos consideraron que la pregunta estaba mal planteada, porque en el espacio "aparecen dos funciones".

En este sentido, aunque en el curso se estudiaron funciones definidas por intervalos, resulta relevante que, en la estructura cognitiva de los alumnos de educación media superior, una función tiene que tener una forma definida, pues ésta no es otra cosa sino la representación funcional de una relación con una estructura definida (recta, parábola, curva con pendiente no constante, etc.).

Para concluir con el análisis de los resultados, resultan relevantes las respuestas de los alumnos respecto a la cuarta categoría de investigación sobre el límite de una función como un cálculo algorítmico, o bien, como una simple sustitución. Al igual que la mayoría de las investigaciones referidas en el marco teórico (Cornu, 1981; Przenioslo, 2004; Swinyard & Lockwood, 2007; Vrancken, *et al.*, 2004), se observó que muchos estudiantes aún tienen dificultades para evitar las indeterminaciones y realizar factorizaciones sencillas.

En este orden de ideas, son relevantes los resultados mostrados en los reactivos número 5 y 7, en donde más de la tercera parte de los alumnos (34% y 41%, respectivamente) consideró que el límite de las funciones no existe. La mayoría de estos alumnos llegaron a esta conclusión evaluando los límites a través de una sustitución directa, en donde se obtiene una indeterminación del tipo 0/0. Estos resultados son consistentes con la postura de Artigue, quien pone de manifiesto la necesidad de evitar los métodos de enseñanza tradicionales, que reducen el análisis a un cálculo algebraico algoritmizado, sin mostrar razonamiento alguno.

Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos por la investigación se observan preconcepciones que se pueden considerar como las estructuras cognitivas más recurrentes que tienen los estudiantes preuniversitarios sobre el concepto de límite de una función en un primer curso de Cálculo de una variable real de funciones reales. Ellas son, principalmente:

- La concepción del límite de una función, como el valor de ésta en un punto dado de su dominio. Es decir, los alumnos entienden que el límite de una función es el valor que adopta la relación funcional cuando ésta se encuentra en un punto dado de su dominio, lo cual les impide pensar en términos del comportamiento infinitesimal de la función, y en qué pasa cuando los valores sucesivos de una función no tienden hacia un número real.
- En segundo lugar, y en realidad, como consecuencia de la conclusión anterior, la idea de que el límite de una función es único, siempre y cuando se cumpla el teorema de los límites laterales, lo cual no es formalmente cierto. Esta preconcepción surge en el nivel medio superior, en el contexto de las funciones estudiadas durante un primer curso de Cálculo, y en donde no se enfatiza, por ejemplo, en la existencia y características de funciones definidas por intervalos.
- Como tercera preconcepción recurrente, la determinación de un límite a partir de elementos puramente gráficos, como el comportamiento geométrico de la función, en un entorno reducido. De ello se dio cuenta con una función trigonométrica racional en donde la simple inspección de la gráfica o bien, el análisis por entornos y aproximaciones infinitesimales, proporcionan conclusiones erróneas. Nuevamente, la idea de valor, frente a la idea de proximidad y, en este caso de proximidad en intervalos infinitos (por ser abiertos) es lo que impide el aprendizaje de este tipo de límites por parte de los estudiantes.
- Finalmente, la relación directa entre continuidad y la existencia de un límite, así como entre la discontinuidad o indeterminación y la no existencia del límite. Esta última preconcepción, como corolario de las anteriores, se explica al

entender que, para los estudiantes, si una función no está definida para un punto dado de su dominio, no puede tener valor en ese punto, y por tanto, no puede existir límite.

Bibliografía

Aguilar, S, *et al.* (2007). Utilización de imágenes para la detección de concepciones alternativas: un estudio exploratorio con estudiantes universitarios. En *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias* 6 (3), 691-713.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y Aprendizaje del Análisis Elemental. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 1, 40-55.

Bachelard, G. (1979). *La formación del espíritu científico*. *México*: Siglo XXI Editores.

Becerra, J. (2004). *Matemáticas VI*. *Un paseo sencillo e introductorio al Cálculo*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En *El futuro del cálculo infinitesimal. ICME-8*, 331-354. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Campanario, J. y Otero, J. (2000). Más allá de las ideas previas como dificultades de aprendizaje: las pautas de pensamiento, las concepciones epistemológicas y las estrategias metacognitivas de los alumnos de ciencias. En *Enseñanza de las ciencias* 18 (2), 155-169.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics education: A vision of its evolution. En *Educational Studies in Mathematics* 53(3), 255-270.

Carrascosa, J. (2005). El problema de las concepciones alternativas en la actualidad. Análisis sobre las causas que la originan y/o mantienen. En *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias* 2 (2), 183-208.

Cauchy, A. (1821). *Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique.* Paris: l'Imprimerie Royale.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Tesis Doctoral, Université Scientifique et Médicale, Grenoble.

Courant, R. & Robbins, H. (2006). *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales.* México: Fondo de Cultura Económica.

Fernandez, E. (2004). The students' take on the epsilon-delta definition of a limit. En *Primus: Problems Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies* 14 (1), 43-54.

Mamona-Downs, J. (1990), *Calculus-Analysis: A review of recent educational research*, II Simposio Internacional Investigación en Educación Matemática, 11-36, Cuernavaca, México.

McDermott, L. & Shaffer, P. (1992). Research as a guide for curriculum development: An example from introductory electricity. Part 1: Investigation of student understanding. En *American Journal of Physics* 60 (11), 994-1003.

Mora, C. y Herrera, D. (2009). Una revisión sobre ideas previas sobre el concepto de ciencia. En *Latin-American Journal of Physics Education* 3 (1), 72-86.

Páez, R. (2004). *Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión.* Tesis Doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV) del IPN.

Pita, C. (1998). *Cálculo de una variable.* México: Prentice Hall.

Prezenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. En *Educational Studies in Mathematics* 55, 103-132.

Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la Enseñanza del Cálculo en una institución educativa. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 12 (3), 355-382.

Salloum, S. & BouJaoude, S. (2007). Careful! It is H2O? Teacher's conceptions of chemicals. En *International Journal of Science Education* 30(1), 33-64.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles, related to limits. En *Educational Studies in Mathematics* 18, 371-397.

Swinyard, C. A. y Lockwood, E. (2007). Research on Students' Reasoning about the Formal Definition of Limit: An Envolving Conceptual Analysis. En *Research in Undergraduate Mathematics Education* 12, 36-72.

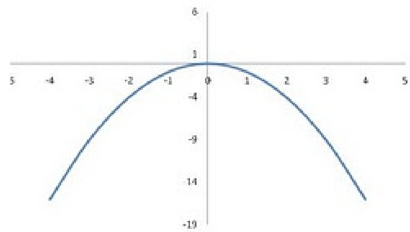
Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. En *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.

Vrancken, S. y Gregorini, M., *et al.*, (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. En Premisa, *Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática* 29 (8), 9-19.

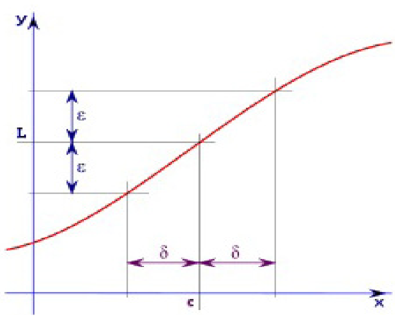
Anexo 1. Cuestionario de preguntas abiertas

1. Explique detalladamente los elementos de la siguiente expresión matemática y proponga un ejemplo claro, tanto en forma algebraica, como geométrica: lim ? → ? – ? (?) = ?

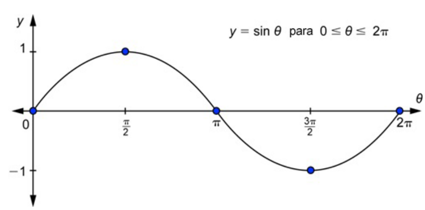
2. Se sabe que lim ? → ? – ? (?) = ? = lim ? → ? + ? (?). A esta expresión se le conoce como "Teorema de los límites laterales". A partir de la siguiente gráfica de un función algebraica, explique detalladamente el contenido de este teorema y proponga un ejemplo para la función *f(x)* = *x2*.



3. En la siguiente figura se muestra la explicación geométrica de la definición formal del límite de una función. Explique detalladamente esta imagen y el significado de la simbología que en ella aparece.

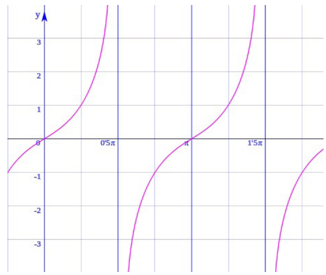


4. La siguiente gráfica explica el comportamiento de la función f(x) = *Sen x* ¿Cuál es el resultado de lim ? → ? ? ? ? ? ? Explique su respuesta.

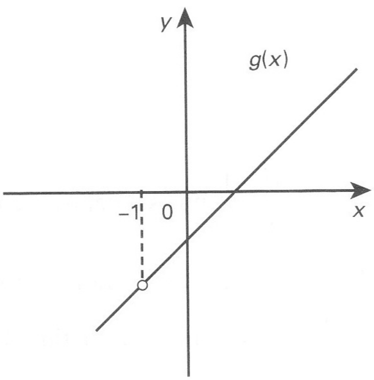


5. Explique detalladamente el procedimiento que sigue para resolver el siguiente límite y proporcione una explicación acerca del porqué, a primera vista, pareciera que el límite conduce a una indeterminación del tipo %, en donde el límite no existiría:
lim?→0tan???? ?

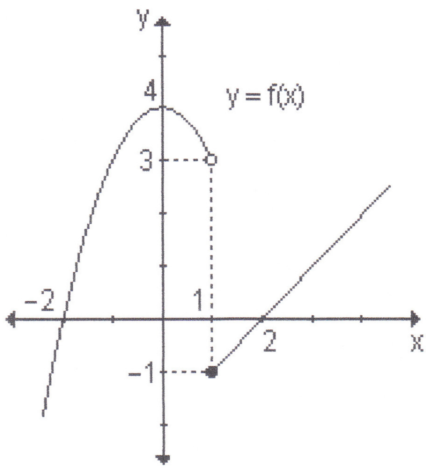
6. Explique detalladamente el resultado del límite limx→π/2 tan x, a partir de su gráfica.

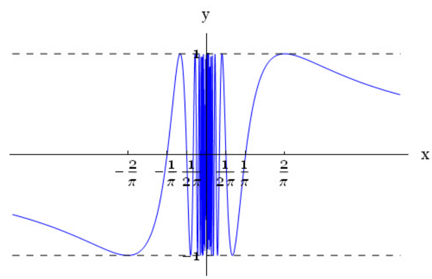


7. A continuación se presenta la gráfica de la función ??= x2−1?−1. Explique qué sucede al límite de la función cuando la variable independiente se acerca a 1 y concluya sobre el resultado de lim?−1x2− 1?+1.



8. Sea la función *f(x)* que se muestra en la gráfica ¿cuál es el límite de la función cuando x se aproxima por la izquierda a 1? Explique detalladamente su respuesta.



9. "Si *f(x)* se aproxima cada vez más a un número *L* a medida que *x* se acerca a un valor *a*, tanto por la derecha como por la izquierda, el límite de la función es *L*, el cual es un valor único". Este teorema se conoce con el nombre de "Teorema de los límites laterales". Proponga un ejemplo, tanto algebraico como geométrico, en el que el límite de una función cumpla con este teorema.	10. Sea la función *f(x)=sen* ? ? que se muestra en la gráfica ¿cuál es el límite de la función cuando *x* tiende a cero? Explique detalladamente su respuesta. 

Nota

[1] Este artículo se desprende de la investigación titulada "El desarrollo sociohistórico y las concepciones alternativas de los estudiantes preuniversitarios sobre el 'límite de una función", realizada como parte del programa de Doctorado en Ciencias de la Educación del ISCEEM, con el apoyo de la Secretaría de Educación del Gobierno del Estado de México.